Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
DM 7

Exercice 1 :

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = \dfrac{1+2u_n}{3+2u_n} \end{cases}$$

a) Déterminez une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. On précisera son ensemble de définition.

b) Etudiez les variations de f sur $[0,1]$ et le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0,1]$.

c) Représentez la courbe de f sur $[0,1]$, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite (u_n) pour des valeurs de u_0 que vous jugez intéressantes.

d) Montrez que si $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq [\frac{1}{2}, 1]$.

e) Déduire de tout ce qui précède que si $u_0 \geq \frac{1}{2}$, alors $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

f) Que dire du cas $u_0 \in [0, \frac{1}{2}[$?

2. Soit maintenant (w_n) définie par $w_0 = \frac{1}{4}$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{1+2w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminez une fonction g telle que $w_{n+1} = g(w_n)$.

b) Dressez le tableau de variation de g, déterminez ses points fixes et la position de la courbe de g par rapport à la droite d'équation $y = x$ et tracez sur un même graphique la courbe de g, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite (w_n).

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = w_{2n}$ et $t_n = w_{2n+1}$. Soit $h = g \circ g$. Montrez que ces suites vérifient les relations de récurrence : $s_{n+1} = h(s_n)$ et $t_{n+1} = h(t_n)$.

d) Montrez que $h = f$ (où f est la fonction de la première partie de l'exercice) et déterminez les limites des suites (s_n) et (t_n).

e) La suite (w_n) est elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

---

1. a) En posant la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$ par $\boxed{f(x) = \dfrac{1+2x}{3+2x}}$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) f est dérivable sur son ensemble de définition, en particulier sur $[0,1]$ et

$$f'(x) = \frac{2(3+2x) - 2(1+2x)}{(3+2x)^2} = \frac{4}{(3+2x)^2}$$

Ainsi, f est croissante sur $[0,1]$.

D'autre part $f(x) - x = \dfrac{1+2x}{3+2x} - x = \dfrac{1-x-2x^2}{3+2x}$.

Comme $x \in [0,1]$, $3+2x > 0$ et $f(x) - x$ est du signe de $1 - x - 2x^2$ dont les racines sont -1 et $\dfrac{1}{2}$

On résume tout cela dans le tableau ci dessous :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{5}$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

c) Le dessin laisse penser deux comportements différents selon les valeurs de u_0 (plus petit ou plus grand que $\dfrac{1}{2}$, mais une convergence toujours vers $\dfrac{1}{2}$.

d) Supposons $u_0 > 1/2$ et montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

L'initialisation est validée puisque $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que l'on ait $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

Alors $f(u_n) \in f(\left[\frac{1}{2}, 1\right]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$.

Comme $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on obtient $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

e) Pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) - x \leq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle converge donc vers une limite ℓ avec $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$ (puisque $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$)

Comme en outre f est continue, $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$ et la relation $f(u_n) = u_{n+1}$ donne par passage à la limite que $f(\ell) = \ell$.

Ainsi $\ell = -1$ ou $\ell = \frac{1}{2}$, mais comme on a dit que $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$, on en déduit $\boxed{\lim u_n = \frac{1}{2}}$.

f) Si $u_0 \in [0, \frac{1}{2}]$, on montre de la même façon que $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout n, et que la suite est cette fois croissante. On obtient alors à nouveau $\boxed{\lim u_n = \frac{1}{2}}$.

2. a) On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+2x}$: on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = g(w_n)$

b) Pour tout $x \neq \frac{-1}{2}$, g est dérivable avec $g'(x) = -\dfrac{1}{(1+2x)^2}$, donc g est décroissante sur $]-\infty, \frac{-1}{2}[$ et sur $]\frac{-1}{2}, +\infty[$.

D'autre part, $g(x) - x = \dfrac{1}{1+2x} - x = \dfrac{1 - x - 2x^2}{1+2x}$. On cherche les racines de $1 - x - 2x^2$ qui sont $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $1 - x - 2x^2 \geq 0$ pour $x \in [-1; \frac{1}{2}]$ et $1 - x - 2x^2 \leq 0$ pour $x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$g(x) - x$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Remarquons au passage que $g(0) = 1$ et qu'ainsi $g([0, +\infty[) = [0, 1]$, ce qui va garantir que la suite (w_n) est dans $[0, 1]$, ce que l'on observe sur le dessin.

c) On fait comme en TD : on a $s_{n+1} = w_{2n+2} = g(w_{2n+1}) = g(g(w_{2n})) = g \circ g(s_n) = h(v_n)$. De même pour t_n.

d) On calcule simplement pour tout x tel que $g(x) \neq \frac{-1}{2}$,

$$h(x) = g(g(x)) = \frac{1}{1+2\frac{1}{1+2x}} = \frac{1+2x}{3+2x}$$

On a donc bien $h = f$.

D'après l'étude faite dans la première partie, si, comme $s_0 = w_0 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, on a (s_n) croissante et $\lim s_n = \frac{1}{2}$. De plus $t_0 = w_1 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ et alors (t_n) décroissante et $\lim t_n = \frac{1}{2}$.

e) Comme $\lim w_{2n} = \lim s_n = \lim w_{2n+1} = \lim t_n = \frac{1}{2}$, on conclut par le théorème de partitionnement pair/impair que $\boxed{\lim w_n = \frac{1}{2}.}$