6.2 Ondes acoustiques-Exercice 8

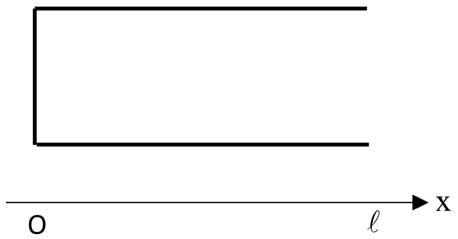
Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur $\ell = 1$ m fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre. Les pression, température et masse volumique moyenne de l'air contenu dans le tuyau sont :
$P_0 = 1{,}013.10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\mu_0 = 1{,}22$ kg/m^3. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}4$.

a-Déterminer les fréquences ν_0 du fondamental et ν_1 du premier harmonique.

b-A la fréquence ν_1 on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air égale à $a_0 = 1$mm.
En déduire l'amplitude maximale correspondante : - p_0 pour la surpression
- τ_0 pour la température

---

a-



Avec les données, on calcule : $c = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}$

A.N : c = 341 m.s^{-1}

Ventre de pression en x = 0 et nœud de pression en $x = \ell$:

$\Rightarrow L = \dfrac{\lambda_0}{4}$ pour le mode fondamental $\Rightarrow \boxed{\nu_0 = \dfrac{c}{4\ell}}$ A.N : $\nu_0 = 85{,}3$ Hz

$\Rightarrow L = \dfrac{3\lambda_1}{4}$ pour le premier harmonique $\Rightarrow \boxed{\nu_1 = \dfrac{3c}{4\ell}}$ A.N : $\nu_1 = 255{,}9$ Hz

b-Onde plane stationnaire de déplacement des particules de fluides pour le premier harmonique :

$$\xi_1(x,t) = a_0\cos(\omega_1 t - \varphi)\cos(k_1 x - \psi) \text{ avec } \omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{3\pi c}{2\ell} \text{ et } k_1 = \frac{\omega_1}{c} = \frac{3\pi}{2\ell}$$

Nœud de déplacement en x = 0 : $\xi_1(0,t) = 0 \Rightarrow \cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \dfrac{\pi}{2}$ par exemple

Donc : $\xi_1(x,t) = a_0\cos(\omega_1 t - \varphi)\sin(k_1 x)$

Puis : $v_1(x,t) = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial t}(x,t) = -\omega_1 a_0 \sin(\omega_1 t - \varphi)\sin(k_1 x)$

Puis équation d'Euler linéarisée : $\mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x}(x,t) \Rightarrow -\omega_1^2 \mu_0 a_0 \cos(\omega_1 t - \varphi)\sin(k_1 x) = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)$

D'où : $p_1(x,t) = -\dfrac{\omega_1^2 \mu_0 a_0}{k_1}\cos(\omega_1 t - \varphi)\cos(k_1 x) = -\mu_0 c a_0 \omega_1 \cos(\omega_1 t - \varphi)\cos(k_1 x)$

L'amplitude de la pression est donc : $\boxed{p_0 = \mu_0 c a_0 \omega_1}$ A.N : $p_0 = 669$ Pa

<u>Loi de Laplace</u> pour l'air en évolution adiabatique réversible entre l'état de repos et l'état de pression acoustique maximale :

$$P_0^{1-\gamma} T_0^{\gamma} = (P_0 + p_0)^{1-\gamma}(T_0 + \tau_0)^{\gamma} \Rightarrow P_0^{1-\gamma} T_0^{\gamma} = P_0^{1-\gamma} T_0^{\gamma}\left(1 + \frac{p_0}{P_0}\right)^{1-\gamma}\left(1 + \frac{\tau_0}{T_0}\right)^{\gamma}$$

$$\Rightarrow 1 = \left(1 + \frac{p_0}{P_0}\right)^{1-\gamma}\left(1 + \frac{\tau_0}{T_0}\right)^{\gamma}$$

$\tau_0 \ll T_0$ et $p_0 \ll P_0$ donc on fait un développement limité : $1 = \left(1 + (1-\gamma)\dfrac{p_0}{P_0}\right)\left(1 + \gamma\dfrac{\tau_0}{T_0}\right)$

D'où : $\boxed{\tau_0 = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\dfrac{T_0}{P_0} p_0}$ A.N : $\tau_0 = 0{,}55$°C
