Limite de fonctions. Suite définie de manière implicite.
DM 8

Exercice 1 :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+3x & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x^3+x^2-3x-3}{x^2-1} & \text{si } x > -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

1. Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.
2. Etudiez les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.
3. f peut-elle être prolongée par continuité en -1 ? Précisez la valeur de $f(-1)$ qu'il faut poser pour avoir la continuité à droite.
4. Que dire de la situation en 1 ? (prolongeable par continuité ? continuité à droite ou à gauche ? interprétation graphique ?)

---

1. En $+\infty$, en factorisant par x^3 au numerateur et x^2 au dénominateur, on arrive à $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2}a(x) = xa(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
   En $-\infty$: pour $x < 0$, on a
   $$\begin{aligned} f(x) &= |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+3x \\ &= -x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+3x \\ &= x(3-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}) \end{aligned}$$
   donc par produit de limite $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$
2. En $+\infty$, la même factorisation que pour la première question donne : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3}{x^3}a(x) = a(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
   D'autre part, $f(x) - x = \dfrac{x^3+x^2-3x-3-x(x^2-1)}{x^2-1} = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \dfrac{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{x^2(1-\frac{1}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote d'équation } y = x+1.}$
   En $-\infty$, $\dfrac{f(x)}{x} = 3 - \sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} \to 2$
   De plus $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+3}+x = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$ (forme "$\dfrac{3}{+\infty}$")
   On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une $\boxed{\text{asymptote oblique d'équation } y = 2x.}$
3. Factorisons $f(x)$ pour $x > -1$: $f(x) = \dfrac{(x+1)(x^2-3)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-3}{x-1}$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{-2}{-2} = 1$. D'autre part $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -1$:
   $\boxed{f \text{ n'est donc pas prolongeable par continuité !}}$
   Néanmoins, en posant $\boxed{f(-1) = 1}$, on obtient f continue à droite en -1.
4. En partant de la forme simplifiée dans la question précédente, on a immédiatement $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$: la $\boxed{\text{fonction ne peut pas être prolongée par continuité}}$. On ne peut pas non plus obtenir de continuité à droite. De même à gauche, on obtient $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, rendant impossible une continuité à gauche.
   Graphiquement, la courbe de f admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 1.}$

Exercice 2 :

1. On définit pour tout entier $n \geq 3$ la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - n\ln x \end{array} \right.$
   a) Étudier les variations et les limites de f_n et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}^{*+}$.
   On note a_n la plus petite des solutions et u_n l'autre.
   c) Montrez que : $1 \leq a_n \leq n \leq u_n$.
   d) En déduire $\lim u_n$.
2. Étude de la suite $(a_n)_{n\geq 3}$
   a) Montrez que $f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n)$.
   En déduire que $f_{n+1}(a_n) \leq 0$ et que $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
   b) En déduire que $(a_n)_{n\geq 3}$ est convergente vers une limite $\ell \geq 1$.
   c) Justifier que $\dfrac{a_n}{n} = \ln(a_n)$ et en déduire que $\ell = 1$.
   d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$.
   e) En déduire la limite de $n(a_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

---

1. a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, comme somme de fonctions qui le sont, avec $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$.
   Ainsi $f_n'(x)$ est du signe de $x - n$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est à dire $f_n'(x) < 0$ pour $0 < x < n$ et $f_n'(x) > 0$ pour $x > n$.
   Pour les limites, c'est une coissance comparée pour $+\infty$, et pas de $F.I$ en 0.

   D'où le tableau : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

   b) On applique le théorème de la bijection continue (ou le TVI + strict monotonie donc injectivité) une fois sur $]0,\ n]$ et une fois sur $[n,\ +\infty[$:
   f_n est une bijection de $]0, n]$ dans $f(]0, n]) = [f_n(n); +\infty[$
   Or $f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0$, donc 0 est dans l'intervalle image, et
   $\boxed{\text{il existe bien un unique } a_n \in]0, n[\text{ tel que } f(a_n) = 0.}$
   De même, f_n est une bijection de $[n, +\infty[$ dans $[f_n(n); +\infty[$ et à nouveau 0 est dans l'intervalle image et il existe bien un $\boxed{\text{unique } b_n \in]n, +\infty[\text{ tel que } f(b_n) = 0.}$

   c) La question précédente donne $0 < a_n \leq n \leq u_n$.
   Il suffit ensuite de constater que $f_n(1) = 1 > 0$. Donc comme f est décroissante, on en déduit que $\boxed{1 \leq a_n.}$

   d) Comme pour tout n, $u_n \geq n$, on en déduit immédiatement, par minoration, que $\boxed{\lim u_n = +\infty.}$

2. a) Pour tout $n \geq 3$, on a : $f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1)\ln(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n)$.
   Or, par définition, $f_n(a_n) = 0$, donc $f_{n+1}(a_n) = -\ln(a_n) \leq 0$ car $a_n \geq 1$

   On a donc $f_{n+1}(a_n) \leq 0$ et $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ (par définition de a_{n+1}).

   D'autre part, f_{n+1} décroît strictement sur $[1,\ n+1]$, intervalle contenant a_n et a_{n+1}, donc les antécédents sont rangés en ordre inverse des images :
   pour tout $n \geq 3$, $f_{n+1}(a_{n+1}) \geq f_{n+1}(a_n)$, donc $a_{n+1} \leq a_n$.
   ALT : on peut également raisonner en utilisant une bijection réciproque, de même monotonie que f_{n+1} e l'appliquer, en faisant attention à bien dire qu'on est dans l'intervalle $[1, n+1]$ où f_{n+1} est bijective....
   $\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\geq 3} \text{ est donc décroissante}}$

   b) $(a_n)_{n\geq 3}$ étant décroissante et minorée par 1, elle converge.
   Notons ℓ sa limite. Comme $a_n \geq 1$, pour tout $n \geq 3$, on en déduit, par passage à la limite que $\ell \geq 1$.

c) Pour tout $n \geq 3$, on a $a_n - n\ln(a_n) = 0$, donc $\dfrac{a_n}{n} = \ln(a_n)$.

Or $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ converge vers une limite ℓ , donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 0$, c'est à dire $\ln(\ell) = 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } \left(a_n\right)_{n\geq 3} \text{ converge vers } e^0 = 1}$

d) On sait que $\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\ln X}{X-1} = 1$. (limite usuelle ou nombre dérivé)

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ donc, par composition : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1}$

e) Par définition de a_n, on a : $a_n = n\ln(a_n)$ donc $\dfrac{a_n - 1}{\ln(a_n)} = n\dfrac{a_n - 1}{a_n}$ donc

$n(a_n - 1) = a_n \dfrac{a_n - 1}{\ln(a_n)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$.

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n - 1) = 1}$