Suspension de voiture

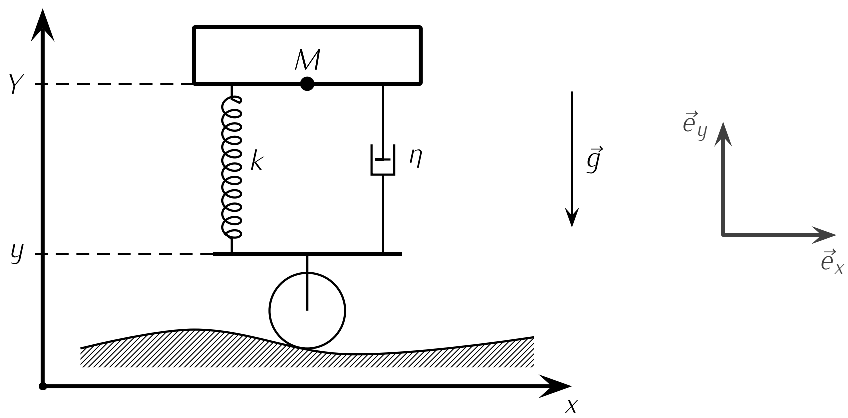
Dans ce problème, nous allons étudier un modèle de suspension de voiture. La suspension est constituée d'un amortisseur visqueux et d'un ressort, reliés à une roue sans masse et l'ensemble supporte une masse m représentant la voiture. Le coefficient d'amortissement est noté η et la raideur du ressort k. L'accélération de pesanteur est notée g.

On ramènera le véhicule à un point matériel M (système d'étude), posé sur la suspension.

La longueur à vide du ressort est notée l_0. Les altitudes de la roue (notée y) et de la masse (notée Y) sont prises « aux bornes du ressort » et de l'amortisseur (voir figure ci-dessous). À l'équilibre la longueur du ressort est l_{eq} et on redéfini les origines de y et Y telles que $y_{eq} = 0$ et $Y_{eq} = 0$ à l'équilibre sur une route horizontale. On a donc $\boxed{l = l_{eq} + Y - y}$.

On se placera dans un référentiel en translation rectiligne uniforme horizontalement par rapport au sol à une vitesse égale à celle de la voiture. Ce référentiel est galiléen puisqu'en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre. Dans ce référentiel, la vitesse du châssis est uniquement selon la direction verticale $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y = \dot{Y}\vec{e}_y$.

La force exercée par l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse du châssis par rapport à la roue, soit : $-\eta\dot{l}\vec{e}_y$, avec $\dot{l} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ la dérivée temporelle de la variable l par rapport au temps.



Q1 1. Faire le bilan des forces appliquées au point matériel M.

Q2 2. Exprimer l_{eq} en fonction de l_0, k, m, et g, à l'équilibre sur une route horizontale.

Q3 3. Calculer la résultante des forces qui s'exercent sur la masse en fonction de l et $\dot{l}$.

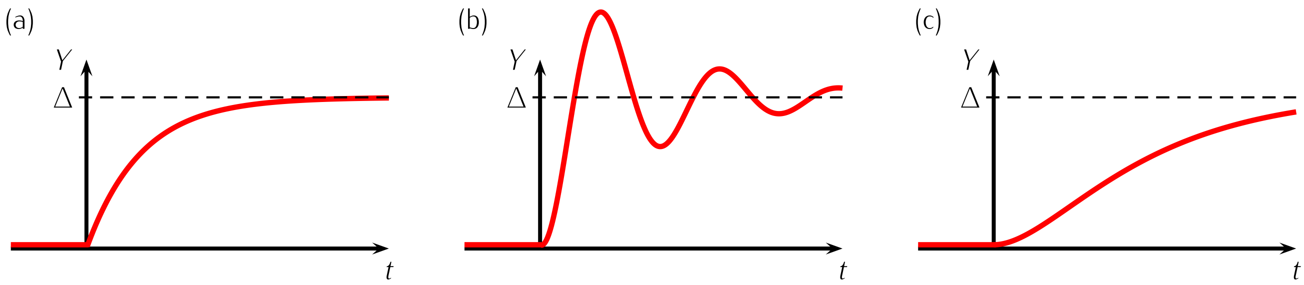
Q4 4. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement vertical de la masse M et montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{Y} + \frac{1}{\tau}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = f(y,\dot{y})$$

où τ et ω_0 sont des constantes et f une fonction que l'on explicitera.

5. La voiture roule sur une route horizontale. À l'instant $t = 0$, la roue monte sur une marche de hauteur Δ. La figure ci-dessous présente l'évolution de $Y(t)$.

Q5 Indiquer, en justifiant, **pour chaque courbe** si elle correspond ou non à une solution possible.



6. On s'intéresse maintenant au régime d'oscillations forcées en imposant à la roue un mouvement sinusoïdal. Dans ce régime oscillant, on utilisera les notations complexes : $\underline{y} = \underline{a}e^{j\omega t}$ et $\underline{Y} = \underline{A}e^{j\omega t}$.

Q6 Montrer que l'équation différentielle établie précédemment peut alors s'écrire :

$$\underline{Y} = \underline{H}(\omega)\underline{y}$$

où $\underline{H}(\omega)$ est une fonction de transfert que l'on explicitera.

Q7 7. En introduisant une variable $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et un facteur sans dimension r (que l'on explicitera), montrer que l'on peut alors écrire :

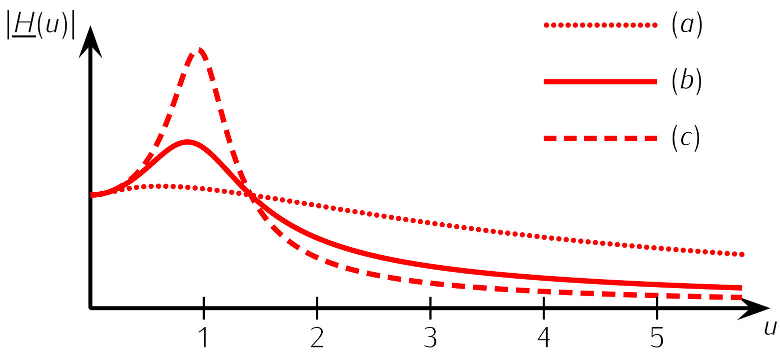
$$\underline{H}(u) = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{1+jru}}.$$

Q8 8. Calculer les valeurs limites de $|\underline{H}(u)|$ et de $\arg(\underline{H}(u))$ quand $u \to 0$ et $u \to \infty$.

9. La suspension constitue un filtre mécanique. La figure ci-dessous montre l'allure de la courbe $|\underline{H}(u)|$ pour différentes valeurs de r ($r = 1/2, 1$ et 3).

Identifier les courbes correspondant aux différentes valeurs de r et commenter ces courbes.

Q9 En déduire la nature du filtre.



10. La voiture roule maintenant sur une route ayant un profil d'équation $y = a\cos(2\pi x/\lambda)$. On suppose que la roue reste en permanence en contact avec la route et que sa vitesse v selon l'axe horizontale (Ox) reste constante.

Q10 Exprimer la pulsation d'excitation ω en fonction de v et λ.

11. Dans le film *Le salaire de la peur*, réalisé par H.-G. Clouzot en 1953, un camion transportant de la nitroglycérine doit passer sur un pont fait de tôle ondulée. Pour limiter l'amplitude des oscillations (de Y

Q11), le camion doit-il rouler lentement ou à vive allure (justifier votre réponse à l'aide de l'allure de $|\underline{H}(u)|$) ?

12. En fait, la grandeur pertinente pour mesurer l'intensité des secousses n'est pas l'amplitude du mouvement du camion, mais l'amplitude de l'accélération verticale A_{acc} qu'il subit.

Q12 Justifier que l'on peut écrire :

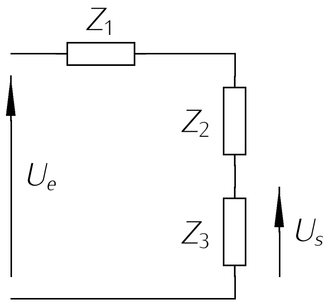
$$A_{acc}(\omega) = a\omega^2|\underline{H}(\omega)|.$$

13. Calculer les valeurs limites de $A_{acc}(\omega)$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

Q13 À l'aide de la courbe $|\underline{H}(u)|$ donnée précédemment, tracer l'allure de $A_{acc}(\omega)$ pour $r = 1$.

Q14 14. Ce résultat vous ferait-il changer d'avis au sujet de la vitesse à adopter pour éviter les secousses trop importantes du camion de nitroglycérine ?

15. Le filtre mécanique réalisé par la suspension possède un équivalent électrique. Sur le circuit schématisé sur la figure ci-dessous, les dipôles notés 1, 2 et 3 possèdent des impédances notées $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ et $\underline{Z}_3$.



Q15 En régime sinusoïdal, exprimer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$ en fonction de $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ et $\underline{Z}_3$.
On supposera aussi que le filtre est en sortie ouverte.

16. On souhaite réaliser le circuit électrique correspondant à la suspension. Pour cela, on dispose d'un conducteur ohmique de résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

Q16 Expliquer (en justifiant votre choix) comment disposer ces trois composants, c'est-à-dire trouver qui de 1, 2 et 3 correspond à chaque composant.

Q17 17. Exprimer les relations que doivent vérifier R, L et C en fonction des grandeurs mécaniques m, k et η pour que les deux systèmes soient équivalents.

Suspension de voiture

D'après 2nd concours ENS-Lyon 2010

Q18 1. Bilan des forces appliquées au point matériel M :
- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0).\vec{e}_y$, avec $l = l_{eq} + Y - y$.
- la force exercée par l'amortisseur $\vec{f} = -\eta\dot{l}\vec{e}_y$

2. À l'équilibre la somme des forces appliquées à M est nulle d'après la première loi de Newton.

Q19 $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow -mg\vec{e}_y - k(l_{eq} - l_0)\vec{e}_y + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}}$.

N'oublier pas de vérifier la cohérence : si $m = 0$ alors d'après l'intuition $l_{eq} = l_0$ (ce qui correspond à la formule), si m augmente, alors l_{eq} doit diminuer (ce qui correspond à la formule). Cela permet de détecter des erreurs de signe dans les forces.

3. Hors équilibre la résultante des forces est $\vec{P}+\vec{F}+\vec{f} = -mg\vec{e}_y - k(l-l_0)\vec{e}_y - \eta\dot{l}\vec{e}_y = \boxed{\left(-mg - k(l - l_0) - \eta\dot{l}\right)\vec{e}_y}$

Q20

4. D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au système M dans le référentiel galiléen défini par l'énoncé : $m\vec{a} = \left(-Mg - k(l - l_0) - \eta\dot{l}\right)\vec{e}_y$.

Soit après projection selon $\vec{e}_y$: $m\ddot{Y} = -mg - k(l_{eq} + Y - y - l_0) - \eta(\dot{Y} - \dot{y})$.

Or d'après la deuxième question, $-mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$ d'où

$$m\ddot{Y} = -k(Y - y) - \eta(\dot{Y} - \dot{y}) \Rightarrow \boxed{\ddot{Y} + \frac{\eta}{m}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y = \frac{\eta}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y}$$

Q21 L'équation est sous la forme $\ddot{Y} + \frac{1}{\tau}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = f(y,\dot{y})$ suggérée par l'énoncé et par identification :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \tau & = & \frac{m}{\eta} \\ \omega_0 & = & \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f(y,\dot{y}) & = & \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_0^2 y \end{array}\right.}$$

5. On a un système d'ordre 2, on s'attend à des comportements différents en fonction du signe du discriminant de l'équation caractéristique.

La courbe (a) ne peut pas correspondre à notre système à cause de la discontinuité de la dérivée [1] de Y, il s'agit de la réponse d'un système ordre 1.

Q22 Les courbes (b) et (c) peuvent correspondre à notre système (2nd ordre), la (b) si le discriminant est strictement négatif pour avoir un régime pseudo périodique, la (c) a un régime critique ou apériodique (discriminant positif ou nul).

> ***Faites attention, le fait que « La dérivée est nulle pour un ordre 2 » ne marche qu'à certaines conditions ... les connaissez vous ?*** *c'est pour la réponse à un échelon ! Ce n'est pas le cas ici à cause du terme en $\dot{y}$.*

6. L'équation différentielle est : $\ddot{Y} + \frac{1}{\tau}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_0^2 y$. En passant à la notation complexe, une dérivée revient à multiplier par $j\omega$:

$$-\omega^2 \underline{Y} + \frac{j\omega}{\tau}\underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = \frac{j\omega}{\tau}\underline{y} + \omega_0^2 \underline{y} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}\underline{y}$$

Q23 d'où $\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}}$

7. Pour faire apparaitre 1 au numérateur, on divise le numérateur et le dénominateur par $\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{-\omega^2}{\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2} + 1}$$

On a presque la forme souhaitée puisque l'on a $\frac{1}{1 - \text{une fraction}}$. Pour présenter la fraction restante sous la forme de l'énoncé, il suffit de faire apparaitre le $1 + j\times$quelque chose au dénominateur, pour cela on divise par ω_0^2 le numérateur et le dénominateur :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{j\omega}{\omega_0^2\tau} + 1}} = \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{1}{\omega_0\tau}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{1 + jru}}}$$

Q24 On en déduit par identification que $\boxed{u = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } r = \frac{1}{\tau\omega_0}}$ qui est bien sans dimension puisque τ est homogène à un temps et ω_0 à l'inverse d'un temps.

8. On présente la formule sous forme d'un rapport de polynôme :

$$|\underline{H}(u)| = \left|\frac{1}{1 - \frac{u^2}{1 + jru}}\right| = \left|\frac{1 + jru}{1 + jru - u^2}\right| = \sqrt{\frac{1 + (ru)^2}{(1 - u^2)^2 + (ru)^2}}$$

Q25 Ainsi $\boxed{\lim_{u \to 0} |\underline{H}(u)| = 1}$ (termes de plus bas degrés) et $\boxed{\lim_{u \to \infty} |\underline{H}(u)| = 0}$ (termes de plus haut degrés).

1. En fait ce n'est pas si évident que cela à cause du terme en $\dot{y}$ qui crée une force infini lorsque l'on passe par la marche en y. Par exemple, dans le cas d'un circuit RLC soumis à un échelon de tension, la courbe de l'intensité ne présente pas une continuité de sa dérivée. Mais je pense qu'on ne demandait pas aux étudiants de plus justifier que cela.

En 0, $\underline{H}(u) \sim_0 1$ d'où $\boxed{\lim_{u\to 0} \arg(\underline{H}(u)) = 0}$. En $+\infty$: $\underline{H}(\omega) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{1-\frac{u^2}{jru}} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{1-\frac{u}{jr}} \sim_{+\infty} \dfrac{-jr}{u} \Rightarrow$ $\boxed{\lim_{u\to+\infty} \arg(\underline{H}(u)) = -\dfrac{\pi}{2}}$.

9. Les courbes ressemblent à des courbes de résonance, un moyen d'identifier les courbes est de trouver comment évolue la valeur du maximum en fonction de r (... ou de tracer les courbes à la calculatrice ou de prendre des points à la calculatrice en $u = 1$).

   En $u = 1$ $|\underline{H}(u=1)| = \frac{1+r^2}{(0)^2+r^2} = 1 + \frac{1}{r^2}$. Ainsi, plus r est grand, plus $|\underline{H}(u=1)|$ diminue. On en déduit que :

   — $\boxed{\text{la courbe (a) correspond à } r = 3}$
   — $\boxed{\text{la courbe (b) correspond à } r = 1}$
   — $\boxed{\text{la courbe (c) correspond à } r = 1/2}$

   Il ne fallait pas présumer que r était l'équivalent de Q. Le système n'était pas le même que celui du cours et il faut donc démontrer les choses.

   Commentaire des courbes : il y a toujours résonance (compte tenu des limites de $|\underline{H}(u)|$, 1 et 0 et du fait que $|\underline{H}(u=1)| > 1$, la courbe admettra toujours un maximum sur $]0, +\infty[$). On observe sur ces courbes que la résonance est d'autant plus marquée que r est faible et que la pulsation correspondant à la résonance se rapproche de ω_0 lorsque $r \to 0$.

   Ainsi, suivant les réglages de la voiture, il se peut dans certains cas que les oscillations ressenties par les roues soient fortement amplifiée pour les passagers.

   Le filtre formé par ce système ne laisse pas passer les hautes fréquences mais ne modifie pas les basses fréquences, ce qui correspond a priori[2] à un $\boxed{\text{passe-bas}}$.

10. On passe d'un sommet d'une bosse au suivant lorsque l'on parcourt horizontalement une distance λ, or la vitesse horizontale est constante donc le temps T mis pour parcourir cette distance est simplement $T = \lambda/v$.

Q26 On en déduit $\boxed{\omega = 2\pi/T = 2\pi\frac{v}{\lambda}}$.

   Autre manière de voir les choses : $y = a\cos(2\pi x/\lambda)$, or la vitesse horizontale de la voiture étant constante, $x(t) = vt$. Au niveau de la voiture on a donc : $y(t) = a\cos(2\pi vt/\lambda) = b\cos(\omega t)$. On en déduit par identification puisque les 2 fonctions sont égales pour tout t : $2\pi vt/\lambda = \omega$.

   Attention à ne pas dire « On sait que $\lambda = c/f$ donc ... ». Ce type de relation a été vue pour <u>une onde</u> dans un milieu <u>non dispersif</u> et <u>non absorbant</u>. Est-ce a priori le cas de la voiture ?

11. Puisque $\underline{Y} = \underline{H}(\omega)\underline{y}$, on en déduit $Y_m = |\underline{H}(\omega)|y_m$ où Y_m et $y_m = a$ représentent les amplitudes de Y et y. Donc l'amplitude de y étant fixée, il faut minimiser $|\underline{H}(\omega)|$ pour minimiser l'amplitude des oscillations. D'après le graphique, on a donc intérêt à avoir u et donc ω le plus grand possible, soit v le plus grand

Q27 possible. $\boxed{\text{Il faut donc rouler à vive allure.}}$

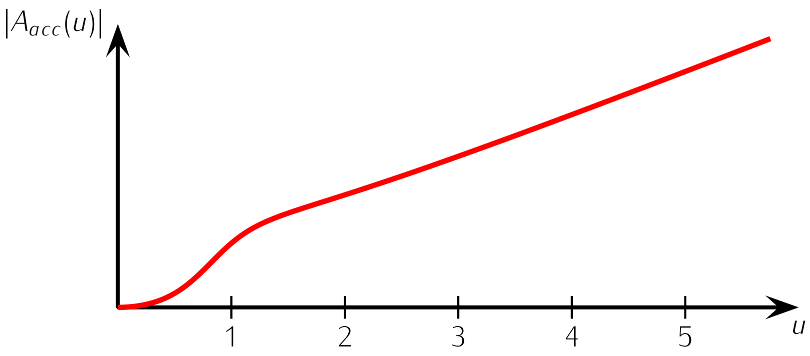
12. Puisque $\underline{Y} = \underline{H}(\omega)\underline{y}$ alors en régime sinusoïdal forcé $\underline{A}_{acc}(\omega)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\underline{Y} = -\omega^2\underline{H}(\omega)\underline{y}$.

Q28 On en déduit par passage au module que $\boxed{A_{acc}(\omega) = \omega^2|\underline{H}(\omega)|a}$.

Q29 13. $|\omega^2\underline{H}(u)| = \omega_0^2 u^2\sqrt{\dfrac{1+(ru)^2}{(1-u^2)^2+(ru)^2}}$ d'où $\boxed{\lim_{\omega\to 0} A_{acc}(\omega) = 0}$ et $\boxed{\lim_{\omega\to+\infty} A_{acc}(\omega) = +\infty}$ (en utilisant les équivalents comme précédemment).

   L'allure de la courbe est

2. Si r est suffisamment petit, la bande passante à -3 dB du filtre peut être de la forme $[\omega_1, \omega_2]$ comme un passe-bande et non $[0, \omega_2]$ pour un passe-bas, mais la réponse attendue de vous ici est a priori simplement « passe-bas » sans chercher plus loin. Dans tout les cas, il faut justifier sa réponse.



Q30

14. Compte tenu de la nouvelle courbe, pour minimiser l'accélération il faut rouler à « petit u », c'est-à-dire à
Q31 $\boxed{\text{petite vitesse}}$.

Q32 15. On reconnait un pont diviseur de tension grâce à l'hypothèse sortie ouverte, on en déduit que :

$$\underline{U_s} = \frac{\underline{Z_2} + \underline{Z_3}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}} \underline{U_e} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{Z_2} + \underline{Z_3}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}}}$$

16. (Les positions 2 et 3 sont parfaitement interchangeables).
Les impédances sont de la forme R, $jL\omega$ et $1/jC\omega$, pour les faire apparaitre, on reprend la fonction de transfert H mécanique et on va diviser le numérateur et le dénominateur par $j\omega$ (pour faire apparaitre du $1/j\omega$ et faire disparaitre le ω^2).

$$\underline{H}_{\text{méca}}(\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2} = \frac{\frac{1}{\tau} + \frac{\omega_0^2}{j\omega}}{j\omega + \frac{1}{\tau} + \frac{\omega_0^2}{j\omega}}$$

Le numérateur étant de la forme une constante $+ 1/j\omega$, mettre $\boxed{\text{la résistance en 2}}$ et
Q33 $\boxed{\text{le condensateur en 3}}$ parait une bonne solution. $\boxed{\text{La bobine serait donc en 1}}$. On aurait alors :

$\underline{H}_{\text{élec}}(\omega) = \dfrac{R + \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{\frac{R}{L} + \frac{1}{jLC\omega}}{j\omega + \frac{R}{L} + \frac{1}{jLC\omega}}$ (la division par L est faite pour pouvoir identifier les termes dans la question suivante)

> ***On pouvait aussi deviner la position en étudiant le comportement assymptotique, mais il vaut mieux ensuite vérifier la fonction de transfert, ce qui servira de toutes façons à la question suivante.***

17. Par identification entre $\underline{H}_{\text{élec}}(\omega)$ et $\underline{H}_{\text{méca}}(\omega)$ on en déduit les équations

$$\begin{cases} \frac{R}{L} & = & \frac{1}{\tau} = \frac{\eta}{m} \\ \frac{1}{LC} & = & \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

Q34 Une solution possible est donc $\boxed{R = \eta,\ L = m \text{ et } C = \frac{1}{k}}$.