VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercices

---

1 Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit paire.

---

2 Lors d'une rencontre d'athlétisme, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. Quand un saut est raté, la compétition s'arrête pour le sauteur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'athlète a, lorsqu'il tente le saut n, une chance sur n de réussir le saut. Soit X son score c'est-à-dire le rang du dernier saut réussi.
Par convention, X prend la valeur $+\infty$ lorsque l'athlète ne rate aucun saut.

1. Quelle est la loi de X ?
2. X est-elle d'espérance finie ? X admet-elle une variance ? Si oui, les déterminer.

---

3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher, deux sont blanches et les autres sont noires.
On tire une à une, et sans remise, les n boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Mêmes questions si les tirages sont faits avec remise.

---

4 *Calculs d'espérance*

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ (où $\lambda > 0$).
   Justifier l'existence et calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]^2$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).
   Calculer $E(X+Y)$.

---

5 *Ruine du joueur*
On suppose qu'une roulette de Casino contient autant de secteurs noirs que de secteurs rouges (et il n'y a pas de secteur vert). Un joueur joue selon le protocole suivant :
— il mise initialement un euro sur la couleur noire,
— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise,
— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose que la fortune du joueur est infinie.
   Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
   Déterminer l'espérance du gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
   Quelle est l'espérance du gain si au lieu de doubler sa mise lorsqu'il rejoue, il la triple ?
3. Le joueur ne possède en fait que $2^n - 1$ euros ($n \in \mathbb{N}^*$).
   Quelle est son espérance de gain ?

6 On lance cinq dés. Après ce premier lancer, les dés qui ont donné un 6 sont mis de côté, les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq 6.
On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer $P(T \leqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on pourra noter X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le $i$ème dé donne un 6.
2. Calculer l'espérance de T.

---

7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in]0, 1[$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{\ell=n}^{+\infty} \ell(\ell-1)\dots(\ell-n+1)x^{\ell-n} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
2. Déterminer a.
3. Déterminer la fonction génératrice de X.
4. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

---

8 On considère une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $1 - p$. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule et on observe l'apparition de k boules blanches. On décide d'estimer la proportion p par le nombre $\dfrac{k}{n}$.
Comment étudier la fiabilité de cette estimation ?

---

9 Soit le réel $p \in]0\,; 1[$. Un mobile se déplace aléatoirement sur le demi-axe des abscisses, côté $x \geqslant 0$. A l'instant initial $t = 0$, il est à l'origine. Si le mobile est au point d'abscisse k ($k \in \mathbb{N}$) à l'instant n, alors il sera, à l'instant $n + 1$, soit au point d'abscisse $k + 1$ avec une probabilité p, soit à l'origine, avec une probabilité $1 - p$. On note X_n la v.a.r. égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Donner la loi de X_0 et celle de X_1.
2. Montrer par récurrence que $X_n(\Omega) = [\![0\,; n]\!]$.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1\,; n]\!], \quad P(X_n = k) = p\,P(X_{n-1} = k - 1)$$
4. En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = p\,E(X_{n-1}) + p$.
5. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de p.

---

10 Soit N la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus par une poule.
On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ.
La probabilité pour qu'un œuf éclose est $p \in]0, 1[$.
On note D la variable aléatoire donnant le nombre de descendants d'une poule.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Reconnaître la loi conditionnelle de D sachant $[N = n]$.
2. Déterminer la loi de D.
3. Les variables aléatoires D et N sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de $N - D$ et D ?
4. Retrouver la loi de N à partir de celles de $N - D$ et D.

$\boxed{11}$ Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

$\boxed{12}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
On tire n boules dans une urne contenant N boules dont des boules blanches, initialement en proportion p, et des boules noires, initialement en proportion $q = 1-p$.
On note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. On suppose que les tirages se font avec remise.
   Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On suppose désormais que les tirages se font sans remise.
   On numérote les boules blanches de 1 à Np. Pour tout $k \in \{1, \dots, Np\}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numéro k est obtenue lors des n tirages, et 0 sinon.
   (a) Exprimer X en fonction de $X_1, \dots, X_{Np}$ et en déduire l'espérance de X.
   (b) Déterminer pour tout couple $(i,j) \in \{1, \dots, Np\}^2$ avec $i \neq j$ la covariance de X_i et X_j.
   En déduire la variance de X.

$\boxed{13}$ Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.
On suppose que X suit la loi $\mathscr{B}(m,p)$ et Y la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Déterminer la loi de $X+Y$.
Généralisation à n variables indépendantes où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{B}(m_i, p)$.

$\boxed{14}$ On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi binômiale négative* de paramètres 2 et $p \in]0,1[$ et on note $X \sim BN(2,p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de la loi $BN(2,p)$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi géométrique de paramètre p.
   (a) Montrer que $X+Y$ suit la loi binômiale négative de paramètres 2 et p.
   (b) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binômiale négative de paramètres 2 et p.
3. On réalise une suite infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès p. Déterminer la loi du deuxième succès.

$\boxed{15}$ Un joueur lance une pièce qui donne *face* avec probabilité $\frac{1}{3}$. S'il obtient *face* alors il tire une boule dans une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^*$). Sinon, il tire une boule dans une urne contenant $2n$ boules, numérotées de 1 à $2n$.
Soit X le numéro de la boule tirée.
On note F l'événement « Obtenir *face* lors du lancer de la pièce ».

1. Déterminer la loi de X sachant F et la loi de X sachant $\overline{F}$.
2. En déduire la loi de X.

16 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid suivant toutes la même loi que X.
Soit N une variable aléatoire indépendantes des X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose $S(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

1. Soit G_X, G_S et G_N les séries génératrices de X, S et N.
   Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a $G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$.
2. On suppose que X et N sont d'espérance finie
   Montrer que S est d'espérance finie et calculer $E(S)$.
3. On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2.
   Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer la variance de S.

---

17 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables alétoires discrètes indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer $P(X_1 \neq X_2)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
   Calculer $P(Y_n > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que Y_n suit une loi usuelle que l'on précisera.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
   Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[\![1, m]\!]$.
   On suppose que N et les variables X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes.
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$.
   Déterminer la loi de Y.

---

18 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X_n = -1) = p$ et $P(X_n = 1) = 1 - p$ avec $p \in [0,1]$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$ et $a_n = P(Z_n = -1)$.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et en déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer l'espérance de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la covariance de Z_n et Z_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2)$. Qu'en déduit-on ?

---

19 *Inégalité de Hoeffding*

1. Soit X une variable aléatoire telle que $P(X = 1) = P(X = -1) = \dfrac{1}{2}$.
   Montrer qu'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E\exp(tX) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.
2. Soit$(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de même loi que X.
   On note pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $P(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(n\dfrac{t^2}{2} - t\varepsilon\right)$.
   (b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{2n}\right)$.

$\boxed{20}$ Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Z_i = X_i X_{i+1}$.

Calculer pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j)$ et en déduire $V\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{21}$ Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement, il se trouve sur la case 0, et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ème étape.
On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f_k = P(Y_1 = k)$ et $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k t^k$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ qui donne la position du pion à l'instant n.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k l'événement « le pion atteint la case k » et $u_k = P(E_k)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Décrire l'événement E_k à l'aide des variables S_n.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $\sum_{i=2}^{n} Y_i \sim \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$.
   (c) Montrer que $P(E_k \cap [Y_1 = j]) = P(E_{k-j})P(Y_1 = j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.
   (d) En déduire que $u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j$.
2. Justifier la définition de $u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ pour $t \in [0,1[$ et montrer que $u(t) = \dfrac{1}{1 - f(t)}$.
3. Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et en déduire les u_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.