Suites, Continuité, Espace vectoriels
DS6

Durée : 3h

Calculatrice interdite

Exercice 1 : Proche TD, pour s'échauffer

1. En justifiant vos calculs, déterminez les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+6x+5}{3x^4+1}$

   b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^3+1}$

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-3x)\cos(x)e^{-x}$.

2. Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y+2z=0\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$

   a) Montrez que E et F sont des sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et précisez une base de chacun et la dimension de ces deux espaces.

   b) Déterminez une base de $E\cap F$.

---

1. a) On factorise par les plus grandes puissances :
$$\frac{x^4+6x+5}{3x^4+1}=\frac{1+6\frac{1}{x^3}+5\frac{1}{x^4}}{3(1+\frac{1}{3x^4})}$$
d'où
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+6x+5}{3x^4+1}=\frac{1}{3}}$$

   b) -1 est racine du numerateur et du dénominateur. On a alors
$$x^2+6x+5=(x+1)(x+5) \text{ et } x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$
d'où $\dfrac{x^2+6x+5}{x^3+1}=\dfrac{x+5}{x^2-x+1}$ ce qui donne
$$\boxed{\lim_{x\to-1}\frac{x^2+6x+5}{x^3+1}=\frac{4}{3}}$$

   c) On va utiliser l'expression conjuguée :
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}-x&=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}\\&=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}\text{car } x>0 \text{ au vois. de} +\infty\\&=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\end{aligned}$$
On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{1}{2}}$.

   d) En posant $f(x)=(x^2-3x)\cos(x)e^{-x}$, on a $0\le|f(x)|\le|(x^2-3x)|e^{-x}$

   Comme $|x^2-3x|e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}|1-\dfrac{3}{x}|$, par croissance comparée, on obtient
$$\lim_{x\to+\infty}|(x^2-3x)|e^{-x}=0$$
par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x)\cos(x)e^{-x}=0}$.

2. a) On peut montrer d'abord que c'est un s.e.v., puis exhiber une famille génératrice, mais le mieux est de faire tout en même temps :
Pour E : Soit $u \in E$. Alors

$$u \in E \Leftrightarrow u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } x - y + 2z = 0$$

Or

$$x - y + 2z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x & = y - 2z \\ y & \in \mathbb{R} \\ z & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u \in E &\Leftrightarrow u = (y - 2z, y, z) \text{ avec } y, z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow u = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \text{ avec } y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit que $E = Vect((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$, donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Comme de plus $(1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1))$ sont non colinéaires, la famille $((1, 1, 0), (-2, 0, 1)))$ est libre et est donc une base de E, avec $dim(E) = 2$.
Un raisonnement analogue donne $F = Vect((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$, donc F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont $\boxed{\text{une base est } ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))}$ et F est de $\boxed{\text{dimension } 2}$ également.

b) On traduit maintenant avec deux équations :

$$u \in E \cap F \Leftrightarrow u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } x - y + 2z = 0 \text{ et } x + y + z = 0$$

Or

$$\begin{cases} x - y + 2z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 2z & = 0 \\ 2y - z & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -3y \\ y & \in \mathbb{R} \\ z & = 2y \end{cases}$$

On en déduit $u \in E \cap F \Leftrightarrow u = y(-3, 1, 2)$ avec $y \in \mathbb{R}$
D'où $E \cap F = Vect((-3, 1, 2))$

$\boxed{\text{Une base de } E \cap F \text{ est donc } ((-3, 1, 2)) \text{ et } dim(E \cap F) = 1 \text{ (c'est une droite).}}$

Exercice 2 : Pour la Saint Valentin

Un·e élève de PCSI 2 veut profiter du 14 février pour offrir un bouquet à son crush secret.
Un bouquet est constitué de 3 fleurs, et le fleuriste propose :

- 6 roses rouges
- 5 roses violettes
- 4 roses roses

On suppose que toutes les roses sont **distinguables**, même au sein d'une même couleur.
L'ordre des fleurs au sein d'un bouquet n'a pas d'importance.
On ne cherchera **pas** à calculer la valeur numérique des formules obtenues dans les questions ci dessous, mais on s'efforcera à justifier soigneusement le denombrement effectué.

1. Combien de bouquets différents peuvent être fabriqué ? On rappelle à nouveau que les roses sont toutes différentes, même au sein d'une couleur.
2. Combien de bouquets de roses rouges peut-on faire ?
3. Combien de bouquets avec trois couleurs différentes peut-on faire ?
4. Combien de bouquets monochromes [a] peut-on faire ?

a. monochrome : une seule couleur

1. Il y a 15 roses en tout, et on en choisi 3 parmi celle ci, sans ordre. C'est une 3 combinaisons, donc il y a

$$\boxed{\binom{15}{3} = 5 \times 7 \times 13 \text{ bouquets possibles}}$$

2. Même raisonnement, avec cette fois le choix parmi 6 roses, donc

$$\boxed{\binom{6}{3} = 20 \text{ bouquets rouges possibles}}$$

3. Il faut choisir une rose par couleur. Ici, c'est facile, car il y a autant de couleur que de nombre de fleur dans le bouquet. Dans la V1 de cette exercice, j'avais mis 4 couleurs de roses, ce qui rendait la plus difficile... Bref, ici, c'est facile :

   - Choix de la rose rouges : 6 possibilités

- puis, choix de la rose violette : 5 possibilités
- puis, choix de la rose rose : 4 possibilités

On a donc, par principe multiplicatif $\boxed{6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ bouquets tricolores possibles.}}$

4. C'est une union de trois cas : les trois roses sont rouges, les trois roses sont violettes, ou les trois roses sont roses, chacun des cas se traitant comme la question 2.
Par principe additif, cela donne donc

$$\boxed{\binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 20 + 10 + 4 = 34 \text{ bouquets monochromes possibles.}}$$

Exercice 3 : Approximation du nombre d'or

On appelle nombre d'or et on note ϕ la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$.

1. Justifier que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1+\sqrt{1}}}}$$

avec n radicaux.
Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n et déterminez une fonction f continue telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$, pour tout $x \geq -1$.
4. Dresser le tableau de variation de f et montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq \phi.$$

5. Etudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geq -1$ et montrer que la suite (u_n) est croissante.
6. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
7. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

Indication : commencez par montrer que $u_{n+1} - \phi = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}$ et utilisez l'expression conjuguée.

8. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

9. Quel est le but du programme suivant ?

```
def fonction(p: int) -> float :
    u = 1
    n = 0
    while 1/(2**(n-1)) > 10**(-p) :
        u = sqrt(1+u)
        n = n+1
    return u
```

1. On a deux racines au polynôme proposé $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Seule la première est positive. On peut ensuite procéder par encadrement à partir de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en estimant $\sqrt{5}$, mais on peut aussi, en posant $P(x) = x^2 - x - 1$ dire que $P(1) = -1$ tandis que $P(2) = 1$: la racine est donc entre 1 et 2, d'où

$$\boxed{1 < \phi < 2}$$

2. On observe qu'il s'agit à chaque fois d'ajouter 1 et de prendre la racine de la somme.
Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
3. On résout pour $x \geq -1$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x$$

Comme $\sqrt{x+1} \geq 0$, $x \geq 0$ et il suffit de résoudre pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Sur $\mathbb{R}_+$, les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, d'où

$$\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow x+1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

L'unique solution de $f(x) = x$ est donc la racine positive de $X^2 - X - 1$, c'est à dire ϕ.

4. La fonction f est définie sur $[-1, +\infty[$, et dérivable sur $]-1, +\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

x	-1		ϕ		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$		$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	ϕ	$\nearrow$	$+\infty$

Par récurrence, montrons que $u_n \in [0, \phi]$.
Initialisation : on a déjà $u_1 = 1 \in [0, \phi]$
Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons que $u_n \in [0, \phi]$. Alors $u_{n+1} \in f([0, \phi]) \subset [0, \phi]$, d'où

$$\boxed{\forall n \geq 1, u_n \in [0, \phi]}$$

5. En posant $g(x) = f(x) - x = \sqrt{1+x} - x$, on a

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x^2 \text{ et } x \geq 0$$

Donc $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi$ et en regardant $g(0)$ puis $g(2)$ (par exemple) on déduit le signe de $g(x)$:

x	-1	ϕ	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$

Comme pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, \phi]$ et que pour tout $x \in [0, \phi]$, $f(x) - x \geq 0$, on a $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n \geq 0$.
La suite est donc croissante.

6. La suite est croissante et majorée par ϕ, donc elle converge vers une limite $\ell \leq \phi$. De plus, comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, on a, par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$, d'où $\ell = \phi$.

$$\boxed{\lim u_n = \phi}$$

7. On suit l'indication : $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ par définition, et on a vu que $\sqrt{1+\phi} = \phi$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \phi = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi} &= \frac{(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi})(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi})}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \\ &= \frac{1 + u_n - 1 - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \end{aligned}$$

Ainsi $|u_{n+1} - \phi| = |\dfrac{u_n - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}}|$
Or $\sqrt{1+u_n} \geq 1$ et $\sqrt{1+\phi} \geq 1$, donc $\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi} \geq 2$ et finalement

$$|u_{n+1} - \phi| \leq |\frac{u_n - \phi}{2}|$$

8. C'est une récurrence facile avec la propriété précédente :
Initialisation : pour $n = 1$, on a, d'après la première question, $|u_1 - \phi| = |1 - \phi| \leq 1 = \dfrac{1}{2^{1-1}}$
Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que $|u_n - \phi| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, alors

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

La propriété est donc héréditaire et l'inégalité est vérifiée pour tout n.
Remarque : c'est une convergence très rapide....

9. Ce programme calcule les termes successifs de la suite (u_n) jusqu'à ce que n soit assez grand pour avoir $\dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-p}$. Il retourne alors $\boxed{u_n \text{ , qui est donc une approximation à } 10^{-p} \text{ près de } \phi.}$

Exercice 4 : Suites implicites

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1. a) Déterminez l'ensemble de définition de f_n en fonction de n et justifiez qu'elle est continue sur cet ensemble de définition.
   b) Peut-on prolonger f_n par continuité afin d'en faire une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Justifiez soigneusement votre réponse.
   c) Etudiez les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   d) Y-a-t-il des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$?
2. On restreint f_n à l'intervalle $[0, +\infty[$.
   a) Donnez le tableau de variation de f_n sur cet intervalle et montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
   b) Montrez que pour tout n, $n < u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   c) A partir du calcul de $f\left(n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)\right)$, montrez que $u_n \leq n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$.
   d) En déduire $\lim \dfrac{u_n}{n}$.

---

1. a) La fonction f_n est définie si et seulement si $x + n \neq 0$, d'où le domaine de définition de f_n : $\boxed{D_{f_n} = \mathbb{R} \setminus \{-n\}.}$ Enfin, f_n est continue sur cet ensemble par somme et quotient d'applications continues.
   b) Le problème se pose en $-n$. On a $\lim\limits_{x\to -n^+} \dfrac{x-n}{x+n} = -\infty$ (forme $\dfrac{-2n}{0^+}$) : c'est une limite infinie, donc $\boxed{\text{aucun prolongement possible...}}$
   c) En factorisant par x, on a immédiatement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-n}{x+n} = 1$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-n}{x+n} = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty}$
   d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$, on a au voisinage de $+\infty$ une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 1.}$
   En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-n}{x(x-n)} - \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$ car $\dfrac{x-n}{x(x-n)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}} \to 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{-X} = -\infty$ par croissance comparée.
   On n'a donc pas d'asymptote, mais une $\boxed{\text{branche parabolique de direction l'axe des ordonnées}}$.
2. a) Pour $x \geq 0$, on calcule $f_n'(x)$ et on trouve $f_n'(x) = \dfrac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$, donc $f_n'(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante et continue. D'après le théorème de la bijection, elle définie donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. Comme on a $f_n(0) = -1 - e^{-0} = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$, f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-2, 1[$ et donc $\boxed{\text{il existe un unique } u_n \text{ tel que } f(u_n) = 0.}$
   b) $f(n) = 0 - e^{-n} < 0$ et f est croissante, donc $u_n > n$ (le zero est atteint “plus tard”). Ainsi, par minoration $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$
   c) C'est le même principe, mais plus technique : on calcule $f(n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right))$ et regarde son signe. On a :

$$f(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)) = \frac{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} - 1\right)}{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} + 1\right)} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} = \frac{1+e^{-n} - 1 + e^{-n}}{1+e^{-n}+1-e^{-n}} - e^{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)}$$
$$= e^{-n} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)}$$

   Or, $\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right) > 1$, donc $-ne^{n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} < -n$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant strictement décroissante, on a donc $e^{-n} - e^{-n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)} > 0$.

   Conclusion : le 0 est atteint "avant" cette valeur, autrement dit : $\boxed{u_n < n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)}$.

d) On a $n < u_n < n\left(\dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$, donc $1 < \dfrac{u_n}{n} < \dfrac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}$. Par le théorème d'encadrement, on a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1}$

Exercice 5 : Bonus 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \geq -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n)$$

1. Montrez que si $u_0 \geq 0$, la suite converge vers 0.
2. Montrez que si $u_0 \in]-1, 0]$, alors la suite n'est plus définie à partir d'un certain rang.

1. On pose la fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. On a bien $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a $f'(x) = 1/(1+x)$ qui est toujours positive. Ainsi, f est croissante.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit maintenant $g : x \mapsto f(x) - x = \ln(1+x) - x$. On a $g'(x) = 1/(1+x) - 1$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1/(1+x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Comme g' est continue, on déduit le signe de g avant et après 0 en regardant par exemple les limites ($\lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$), d'où le tableau de variation de g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Enfin, comme $g(0) = 0$, on a que le maximum de g est 0, donc
$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, +\infty[,\ g(x) = f(x) - x \leq 0.}$
D'après le tableau de variation de f, $[0, +\infty[$ est stable par f. Comme $u_0 \geq 0$, on montre par récurrence (non rédigée dans ce corrigé, mais que vous devez faire) que que pour tout n, $u_n \geq 0$.
D'autre part, comme $f(x) - x \leq 0$ pour tout x, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée, donc elle converge.
Enfin, comme f est continue, on a, via le raisonnement déjà détaillé dans l'exercice 3, $f(\ell) = \ell$.
Une seule limite est possible : 0. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

2. La suite n'est plus définie si pour un certain n, $u_n \leq -1$.
Raisonnons par l'absurde : supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$, donc que la suite est bien définie pour tout n.
On montre comme dans la question précédente que u_n est décroissante.
De plus, comme on a supposé que $u_n > -1$, la suite (u_n) est minorée. Elle converge donc vers une limite qui est un point fixe de f. Or le seul point fixe de f est 0 et $u_0 < 0$ avec u_n décroissante : c'est absurde ! Ainsi, la suite (u_n) ne peut pas être minorée, et donc, à partir d'un certain rang, $u_n < -1$. Elle ne sera alors plus définie car on ne pourra pas calculer u_{n+1}....

Exercice 6 : Bonus 2

Soit E l'ensemble des fonctions continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Soit $F_1 = \{f \in E, f(1) = 0\}$ et $F_2 = \{f \in E, f \text{est constante}\}$
Montrez que F_1 et F_2 sont des s.e.v. de E et que $F_1 \oplus F_2 = E$.

- La fonction nulle s'annule en 1, donc appartient à F_1, d'où $F_1 \neq \emptyset$.
  Soient $f, g \in F_1$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Alors $f(1) = 0$ et $g(1) = 0$, donc $\lambda f(1) + \mu g(1) = 0$, c'est à dire $\lambda f + \mu g \in F_1$.
  Donc F_1 est un sous espace vectoriel de E

  De même F_2 non vide car la fonction nulle est constante, et les combinaisons linéaires de fonctions constantes sont constantes, donc F_2 est un sous espace vectoriel de F_2.
- si $f \in F_1 \cap F_2$, alors f est constante et $f(1) = 0$, donc f est la fonction nulle, ainsi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et la somme est directe.
- Il reste à montrer que $F_1 + F_2 = E$. On a parlé de ce genre de truc il y a longtemps, pour les fonctions paires et impaires, en exemple d'analyse synthèse... Ici c'est le même principe.

  Bien sûr, $F_1 + F_2 \subset E$. On veut montrer l'autre inclusion, ce qu'on va faire par analyse/synthèse.
  Analyse :
  On cherche une condition nécessaire : si $E = F_1 + F_2$, alors toute fonction $f \in E$ s'écrirait $f = f_1 + f_2$ où $f_1(1) = 0$ et f_2 constante.
  Mais alors $f(1) = f_1(1) + f_2(1) = 0 + f_2(1)$ donc $f(1) = f_2(1)$. Comme on veut f_2 constante, nécessairement, $f_2(x) = f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  On a alors $f_2(x) = f(x) - f_2(x)$, c'est à dire $f_2 = f - f(1)$. On a alors bien $f_2(1) = f(1) - f(1) = 0$.
  On a trouvé ce que valent nécessairement f_1 et f_2. Vérifions que c'est suffisant :
  Synthèse :
  Soit $f \in E$. On pose $f_1 : x \mapsto f(x) - f(1)$ et $f_2 : x \mapsto f(1)$.
  On a alors $f_1 \in F_1$ car $f_1(1) = f(1) - f(1) = 0$, et $f_2 \in F_2$.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) + f_2(x) = f(x) - f(1) + f(1) = f(x)$, donc $f = f_1 + f_2$.
  Ainsi $f \in F_1 + F_2$
  On en conclut $E \subset F_1 + F_2$, donc $E = F_1 + F_2$ et enfin $E = F_1 \oplus F_2$.