Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$;
2. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$.

Exercice 2. L'objet de cet exercice est de déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) - f(-t) = e^t$$

1. Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) - f(-t) = e^t$, alors f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\mathcal{E} : \quad y'' + y = 2\,\mathrm{sh}(x).$$

2. Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}$.
3. Conclure.

Exercice 3. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$$

Indication : On pourra poser $u = x - y$.

Exercice 4. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 6x_1 + 3x_2 - 3t + 4e^{3t} \\ x_2' = -4x_1 - x_2 + 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre le système différentiel : $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_3 \\ x_2' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_3' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Exercice 8. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'' - \tan(t)x' + 2x = 0.$$

Indication : déterminer une solution évidente puis utiliser la méthode de la variation.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad 4tx'' + 2x' - x = 0.$$

1. Déterminer une solution φ de (E) développable en série entière. On précisera son rayon de convergence.
2. Reconnaître le développement en série entière de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire une fonction ψ telle que (φ, ψ) est une base de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Même question sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad \ln(x)y' + \frac{1}{x}y = 1.$$

1. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0 ; 1[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 11. Résoudre l'équation différentielle $x(1-x)y' + y = x$ sur $]-\infty ; 1[$ puis sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 12. Résoudre l'équation différentielle $2xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Résoudre le problème différentiel sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'\sin x - y\cos x = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Exercices CCINP

Exercice 14 (CCINP 31).

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 15 (CCINP 32).

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Exercice 16 (CCINP 42).

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice 17 (CCINP 74).

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 18 (CCINP 75). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.