

Capacités numériques : équation de diffusion thermique 1D

I Introduction

On va mettre en œuvre ici un algorithme très simple pour résoudre l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel cartésien.

La situation étudiée sera celle d'une barre de longueur L , s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$, avec diverses conditions aux limites : échauffement puis refroidissement adiabatique.

II Discrétisation de l'équation de diffusion thermique

Dans la barre le champ de température $T(x, t)$ vérifie

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

ou encore en introduisant la diffusivité $a = \frac{\lambda}{\rho c}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour résoudre numériquement cette équation il faut bien sûr passer par une étape de discrétisation spatiale et temporelle.

On note Δx et Δt les pas de discrétisation correspondants. Les positions où seront calculées les températures seront les $x_i = i \times \Delta x$. Les instants de calcul seront les $t_j = j \times \Delta t$.

On note également N et M le nombre de positions et d'instant de calcul.

On stockera les températures dans un tableau à deux dimensions T . Ainsi, $T[i, j]$ contiendra une estimation de la température $T(i \times \Delta x, j \times \Delta t)$.

La discrétisation temporelle, par un développement de Taylor à l'ordre 1 permet d'écrire facilement

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[i, j+1] - T[i, j]}{\Delta t}.$$

Pour la discrétisation spatiale, il faut aller nécessairement à l'ordre 2. Pour éliminer les termes de dérivée première on va écrire deux développements en $x + \Delta x$ et $x - \Delta x$. Ainsi

$$T(x + \Delta x, t) = T(x, t) + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

et

$$T(x - \Delta x, t) = T(x, t) - \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En sommant ces deux relations il vient $T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) = 2T(x, t) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, on en tire $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)}{(\Delta x)^2}$, soit en version discrétisée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2T[i, j]}{(\Delta x)^2}$$

La version discrétisée de l'équation de diffusion devient donc

$$\frac{T[i, j + 1] - T[i, j]}{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta x)^2} (T[i + 1, j] + T[i - 1, j] - 2T[i, j]).$$

On voit donc que l'on peut calculer la température à la position $i \times \Delta x$ à l'instant $(j + 1) \times \Delta t$ par la relation

$$T[i, j + 1] = T[i, j] + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} (T[i + 1, j] + T[i - 1, j] - 2T[i, j]),$$

c'est-à-dire si on connaît le champ de température partout à l'instant antérieur.

On peut remarquer cependant qu'on ne peut pas calculer la température sur les bords avec cette relation. Ce n'est pas un hasard... La prise en compte des conditions limites est là pour cela. Il faut donc écrire quelques lignes de codes supplémentaires éventuellement pour gérer la prise en compte des conditions aux limites.

Cet algorithme fonctionne bien (bonne convergence) si on impose une contrainte dite de stabilité sur les choix de Δx et Δt , à savoir qu'il faut impérativement que la condition suivante soit vérifiée

$$(\Delta x)^2 > 2a\Delta t.$$

Dans la suite on va utiliser une discrétisation spatiale à $N + 2$ points, l'indice i variant entre 0 et $N + 1$. Et ainsi $i = 0$ correspond à l'abscisse $x = 0$, et $i = N + 1$, à l'abscisse $x = L$.

Mettre en œuvre cet algorithme dans les deux situations suivantes.

III Première situation : échauffement de la barre

On suppose la température initiale de la barre uniforme et égale à T_0 pour $t < 0$. À $t = 0$ on impose la température T_1 en $x = 0$, et T_0 en $x = L$. Les conditions aux limites sont alors très simples ici. On écrira dans le code que $\forall j \in [0..M - 1], T[0, j] = T_1$ et $T[N + 1, j] = T_0$.

Il ne reste donc qu'à itérer la relation provenant de l'équation discrétisée pour les instants indicés de 1 à $M - 1$, et pour les positions indicées de 1 à N .

Les courbes obtenues (attention les instants ne sont pas régulièrement espacés), superposées sur un même graphe, sont données ci-après.

On note la convergence vers un état stationnaire avec un profil affine (cohérent avec $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$).

Si on regarde avec des instants régulièrement espacés, on note que les courbes se déforment de moins en moins au cours du temps. Ce qui est normal car le gradient de température est de plus en plus faible...

IV Deuxième situation

On part de l'état stationnaire obtenu à la fin de la situation précédente, on supprime les thermostats et on calorifuge les extrémités.

Ici les conditions aux limites ne sont pas les mêmes. En effet on ne connaît pas les températures aux extrémités ! En revanche la condition d'adiabaticité en ces points impose la nullité du gradient de température. Autrement dit les températures sur les bords, pour $i = 0$ et $i = N + 1$, se déduisent des nouvelles valeurs calculées respectivement en $i = 1$ et $i = N$, de manière à annuler le gradient de température.

Les courbes simulées sont données ci-après, qui montrent la convergence vers un état de température uniforme.

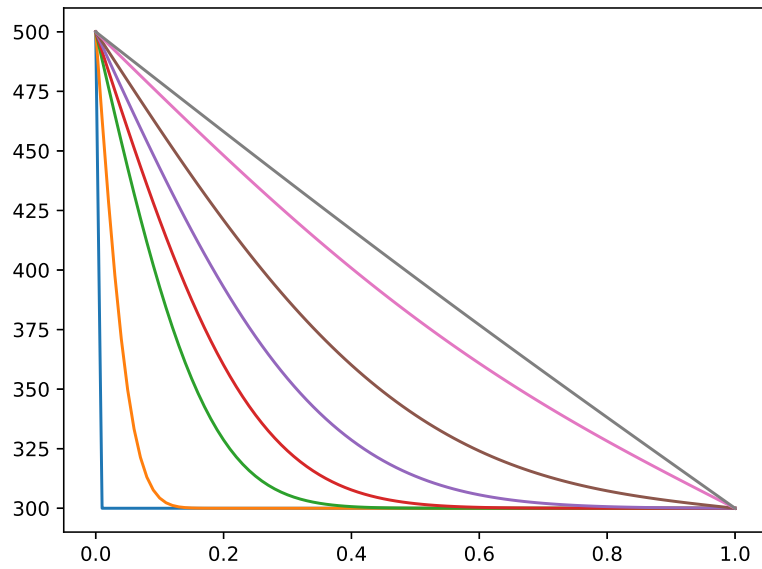
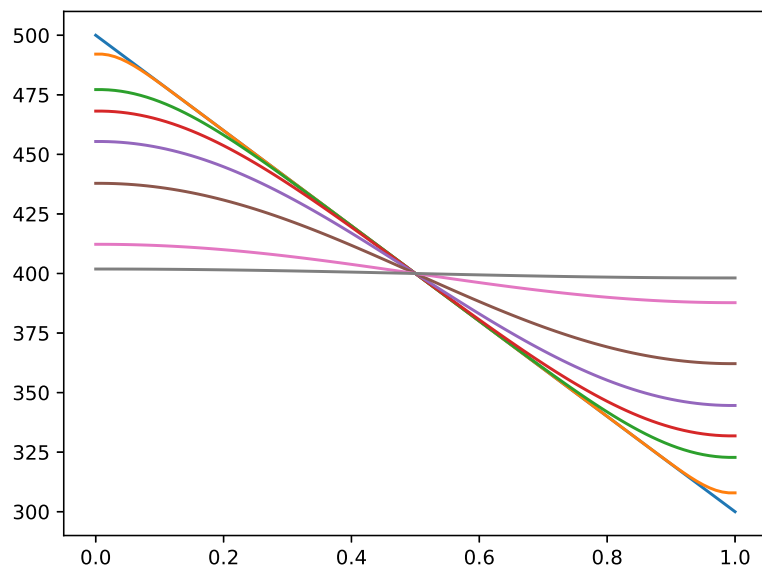
FIGURE 1 – Profils de température lors de la mise au contact avec un thermostat en $x = 0$ 

FIGURE 2 – Retour à l'équilibre, avec conditions adiabatiques sur les bords