Capacités numériques : tracé des lignes de champ

I Introduction

Le programme demande de savoir utiliser un langage de programmation pour tracer "quelques lignes de champ pour une distribution donnée". L'objet de ce travail est la rédaction d'un code Python réalisant cela.

II Position du problème

On considère N charges ponctuelles $q_0, q_1, \cdots, q_{N-1}$ placées aux points $P_0, P_1, \cdots, P_{N-1}$ supposées toutes dans le plan (Oxy) qui est donc un plan de symétrie de cette distribution de charge. Le champ électrique en tout point M de (Oxy) est inclus dans ce plan. On souhaite tracer des lignes de champ dans le plan (Oxy).

Tout point M de (Oxy) sera représenté par une liste `[x,y]` contenant ses deux coordonnées. Le champ $\overrightarrow{E}(M)$ aussi par une liste `[Ex,Ey]` de deux réels flottants.

La loi de Coulomb et le principe de superposition permettent d'exprimer ce champ :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Il est facile d'écrire une fonction `champ(M)` qui reçoit la liste représentant un point, applique cette formule et renvoie la liste représentant le champ électrique en ce point.

III Algorithme pour le tracé d'une ligne de champ

Les lignes de champ sont telles qu'en chaque point M le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M$ le long de la ligne est colinéaire au champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$, et de même sens soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell_M \frac{\overrightarrow{E}(M)}{||\overrightarrow{E}(M)||}$$

Pour tracer une ligne de champ, on se donne un premier point M_0 de coordonnées (x_0, y_0).

On calcule ensuite de proche en proche des points $M_1, M_2, \cdots$ par la formule :

$$\overrightarrow{M_n M_{n+1}} = \pm \Delta\ell \frac{\overrightarrow{E}(M_n)}{||\overrightarrow{E}(M_n)||}$$

où $\Delta\ell$ est une longueur petite devant la distance caractéristique de variation du champ.

Si l'on note (x_n, y_n) les coordonnées de M_n , on a donc :

$$x_{n+1} = x_n \pm \Delta\ell \frac{E_x(x_n, y_n)}{\sqrt{E_x^2(x_n, y_n) + E_y^2(x_n, y_n)}}$$

et

$$y_{n+1} = y_n \pm \Delta\ell \frac{E_y\left(x_n, y_n\right)}{\sqrt{E_x^2\left(x_n, y_n\right) + E_y^2\left(x_n, y_n\right)}}$$

On construit ainsi une ligne de champ approchée qui est parcourue dans le sens du champ électrique (si on prend le signe $+$) ou en sens inverse (si on prend le signe $-$).

L'approximation est d'autant meilleure que $\Delta\ell$ est petit (mais le calcul est aussi plus long).

IV Départ et fin des lignes de champ

Par ailleurs, pour obtenir une carte de champ lisible il faut faire un choix judicieux du point de départ et du sens de tracé de chaque ligne de champ. On choisit ici de prendre un nombre fixe n_{ldc} de points de départ régulièrement disposés autour de chaque charge ponctuelle q_i, à une distance d donnée de celle-ci, et de tracer la ligne de champ dans le sens du champ électrique si $q_i > 0$ et en sens inverse si $q_i < 0$ de manière à s'éloigner de q_i dans les deux cas.

Il faut aussi décider de l'arrêt du tracé de la ligne. Le choix fait ici est le suivant :

- on arrête le tracé lorsque la distance à l'une des autres charges ponctuelles devient strictement inférieure à une valeur $d_{\min}$ fixée ;
- on arrête le tracé si on a déjà fait $n_{\max}$ étapes, c'est-à-dire que la ligne de champ a une longueur maximale égale à $n_{\max}\Delta\ell$.

V Exemple traité

On va appliquer cet algorithme sur la distribution de charge représentée sur la figure ci-dessous (Fig 1) qui modélise une molécule d'eau : une charge $-q$ en $(-1, 0)$ (représentant l'atome d'oxygène) et deux charges $+\frac{q}{2}$ en $(1, \frac{3}{2})$ et $(1, -\frac{3}{2})$. (représentant les atomes d'hydrogène).

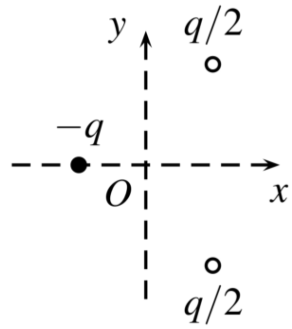

FIGURE 1 –