6.3 Ondes électromagnétiques vide-Exercice 14

Une onde électromagnétique émise par des sources placées le long d'un axe Oz possède une structure cylindrique. En coordonnées cylindriques, le champ électrique dans le vide s'écrit :

$\underline{\vec{E}}(M,t) = E(r)e^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_z$ où E(r) est supposé réel et k = ω/c.

a-Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$. Commenter son expression.

b-Quelle est la valeur moyenne du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne *P* rayonnée par l'onde à travers un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.

c-Comment cette puissance évolue-t-elle avec r ? En déduire E(r) en fonction de r, de la puissance P_h par unité de hauteur et des constantes ε_0 et c.

d-Dans la région appelée « zone de rayonnement », définie par r >> λ, exprimer les champs électrique et magnétique. Commenter la structure de l'onde.

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\vec{u}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_z$$

6.3 Ondes électromagnétiques vide-Exercice 14

---

a-Equation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ => $-\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial r}\vec{u}_\theta = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$

$$=> \left[\frac{dE(r)}{dr}e^{i(\omega t-kr)} - ikE(r)e^{i(\omega t-kr)}\right]\vec{u}_\theta = \frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$=> \frac{1}{i\omega}\left[\frac{dE(r)}{dr}e^{i(\omega t-kr)} - ikE(r)e^{i(\omega t-kr)}\right]\vec{u}_\theta = \underline{\vec{B}}$$

Donc : $\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{1}{i\omega}\left[\frac{dE(r)}{dr} - ikE(r)\right]e^{i(\omega t-kr)}\vec{u}_\theta}$

En notation réelle et en utilisant k = ω/c : $\boxed{\vec{B} = \left[\frac{1}{\omega}\frac{dE(r)}{dr}\sin(\omega t-kr) - \frac{1}{c}E(r)\cos(\omega t-kr)\right]\vec{u}_\theta}$

On n'a pas $\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$ comme pour une onde plane progressive. Les deux champs sont déphasés.

b-Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{\omega}E(r)\frac{dE(r)}{dr}\sin(\omega t-kr)\cos(\omega t-kr) - \frac{1}{c}E^2(r)\cos^2(\omega t-kr)\right]\vec{u}_r$

En moyenne temporelle : $\boxed{<\vec{\Pi}> = \frac{E^2(r)}{2\mu_0 c}\vec{u}_r}$

Puis : $P = \iint_{\text{cylindre}} <\vec{\Pi}>.d\vec{S} = \frac{E^2(r)}{2\mu_0 c}.2\pi rh$ Or : $\frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$ Donc : $\boxed{P = \pi\varepsilon_0 c E^2(r) rh}$

c-Par conservation de l'énergie, cette puissance doit être la même quel que soit le cylindre de rayon r.
Donc *P* est une constante.

On en déduit : $\boxed{E(r) = \sqrt{\frac{P_h}{\pi\varepsilon_0 c}}\frac{1}{\sqrt{r}}}$ avec $P_h = \frac{P}{h}$

d-On a : $\boxed{\vec{E} = \sqrt{\frac{P_h}{\pi\varepsilon_0 c}}\frac{1}{\sqrt{r}}\cos(\omega t-kr)\vec{u}_z}$

On a : $\frac{dE}{dr}(r) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P_h}{\pi\varepsilon_0 c}}\frac{1}{r^{3/2}}$ Puis : $\frac{\left|\frac{1}{\omega}\frac{dE(r)}{dr}\right|}{\left|\frac{E(r)}{c}\right|} = \frac{\frac{1}{2\omega r^{3/2}}}{\frac{1}{cr^{1/2}}} = \frac{c}{2\omega r} \approx \frac{\lambda}{r} << 1$

Donc : $\boxed{\vec{B} \approx -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{P_h}{\pi\varepsilon_0 c}}\frac{1}{\sqrt{r}}\cos(\omega t-kr)\vec{u}_\theta}$

On remarque que dans la zone de rayonnement : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r\wedge\vec{E}}{c}$

On a une structure locale d'onde plane.
