6.5 Phénomènes de propagation dispersifs-Exercice 3

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est : $\omega^2 = (gk + \frac{\gamma}{\mu} k^3) \tanh(kh)$

où g est l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique de l'eau et γ la constante de tension superficielle à l'interface eau-air.

a-Déterminer la dimension de γ .

b-Déterminer la distance caractéristique ℓ_c qui permet de comparer les effets de la tension superficielle et ceux de la pesanteur.

c-Comment se simplifie la relation de dispersion si la longueur d'onde λ est très inférieure à ℓ_c ? très supérieure à ℓ_c ? Donner dans chaque cas la vitesse de phase et la vitesse de groupe dans un milieu de faible profondeur ($h \ll \lambda$) puis dans un milieu de grande profondeur ($h \gg \lambda$). Quand a-t-on dispersion ?

d-On donne $\gamma = 0,073$ S.I. Calculer ℓ_c . Calculer les vitesses de phase et de groupe pour :

- une onde de marée dans l'océan ($\lambda \approx 1000$ km et $h \approx$ quelques km)
- une houle de longueur d'onde 5 m dans un océan profond
- une onde dans une cuve à onde ($\lambda = 3$ cm et $h = 1$ mm)

a- $\frac{\gamma k^3}{\mu}$ en s^{-2} avec k^3 en m^{-3} et μ en $kg.m^{-3} \Rightarrow \gamma$ en $kg.s^{-2} = N.m^{-1} = J.m^{-2}$

b- $\frac{\text{tension superficielle}}{\text{pesanteur}} = \frac{\frac{\gamma k^3}{\mu}}{gk} = \frac{\gamma k^2}{\mu g} \approx \frac{\gamma}{\lambda^2} = \frac{\ell_c^2}{\lambda^2} \Rightarrow \ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$

c-Si $\lambda \ll \ell_c$: la tension superficielle domine $\Rightarrow \omega^2 \approx \frac{\gamma k^3}{\mu} \tanh(kh)$

Si $\lambda \gg \ell_c$: la pesanteur domine $\Rightarrow \omega^2 \approx gk \tanh(kh)$

Pour une faible profondeur : $h \ll \lambda \Rightarrow kh \ll 1 \Rightarrow \tanh(kh) \approx kh$

Pour une grande profondeur : $h \gg \lambda \Rightarrow kh \gg 1 \Rightarrow \tanh(kh) \approx 1$

Condition sur les forces	$\lambda \ll \ell_c$	$\lambda \ll \ell_c$	$\lambda \gg \ell_c$	$\lambda \gg \ell_c$
Condition de profondeur	$h \ll \lambda$	$h \gg \lambda$	$h \ll \lambda$	$h \gg \lambda$
Relation de dispersion	$\omega^2 \approx \frac{\gamma h k^4}{\mu}$	$\omega^2 \approx \frac{\gamma k^3}{\mu}$	$\omega^2 \approx g h k^2$	$\omega^2 \approx g k$
Vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$	$\sqrt{\frac{\gamma h}{\mu}} k$	$\sqrt{\frac{\gamma k}{\mu}}$	$\sqrt{gh}$	$\sqrt{\frac{g}{k}}$
Vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$	$2v_\phi$	$\frac{3}{2}v_\phi$	v_ϕ	$\frac{1}{2}v_\phi$

Le cas $\lambda \gg \ell_c$ et $h \ll \lambda$ est le seul où la vitesse de phase est une constante. Il n'y a pas dispersion.

Pour les autres cas la vitesse de phase dépend de k donc de ω . Il y a dispersion.

d-A.N : $\ell_c = 2,73$ mm

- marée dans l'océan ($\lambda \gg \ell_c$ et $h \ll \lambda$) : $v_\phi = v_g = 220$ m.s⁻¹ pour $h = 5$ km
- houle ($\lambda \gg \ell_c$ et $h \gg \lambda$) : $v_\phi = 2,8$ m.s⁻¹ et $v_g = 1,4$ m.s⁻¹
- cuve à onde ($\lambda \gg \ell_c$ et $h \ll \lambda$) : $v_\phi = v_g = 1$ cm.s⁻¹