

Corrigé du devoir surveillé n° 7

Problème : Jean Perrin et l'hypothèse atomique

I Équilibre vertical d'un gaz à température ambiante

- 1 Par exploitation de la loi des gaz parfaits avec $T_0 = 288$ K et $P_0 = 1.10^5$ Pa, on obtient $V_m = \frac{RT_0}{P_0} = 23,9$ L/mol.

Le rapport demandé en notant n le nombre de moles dans le volume V , et N le nombre

de molécules est $\frac{N \frac{4}{3} \pi R_m^3}{V} = \frac{4 \mathcal{N}_A \pi R_m^3}{3 V_m} \simeq 1.10^{-4} = 0,01\%$.

- 2 Dans le modèle du gaz parfait les molécules sont supposées ponctuelles sans interaction entre-elles. Le rapport précédent laisse effectivement penser que pour ce gaz à température ambiante le modèle du gaz parfait est acceptable.

- 3 $E_{cm} = \frac{1}{2} m v^2$ et $E_{pm} = m g z$ (en ne prenant en compte que la pesanteur).

L'agitation thermique permet d'expliquer la promotion de molécules vers le haut et le fait qu'elles ne sont pas toutes tassées au bas du récipient. On peut le vérifier en comparant l'énergie d'agitation thermique $k_B T_0 = 4.10^{-21}$ J et l'énergie potentielle de pesanteur $m g h = \frac{M}{\mathcal{N}_A g h} = 5.10^{-25}$ J pour une hauteur de 1 m. On a donc bien $k_B T \gg m g h$, même pour h de l'ordre de quelques mètres.

- 4 D'après l'équation d'état du gaz parfait appliquée à un volume mésoscopique sur lequel on suppose l'équilibre thermodynamique réalisé, il vient $\rho(z) = \frac{M P(z)}{R T_0}$.

Cf. cours pour établir $-\frac{dP}{dz} - \rho g = 0$ puis $-\frac{dP}{dz} + \frac{M g}{R T_0} P = 0$.

- 5 La solution est immédiatement $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec $H = \frac{R T_0}{M g} = \frac{k_B T_0}{m g} = 8,1.10^3$ m.

Sur une hauteur de $h = 1$ m, on a $(P_0 - P(z))/P_0 = 1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right) \simeq \frac{h}{H} \simeq 1.10^{-4}$. Il faudrait donc un manomètre suffisamment précis pour détecter des variations de l'ordre de 10 Pa en mesurant la pression atmosphérique. Ce n'est pas le cas des manomètres usuels. Mais on peut le faire...

Dans le cas d'un liquide il y a deux différences (non étudiées en cours car pas au programme...). La première est que la masse volumique est environ 1000 fois plus grande et la deuxième que la masse volumique est quasiment constante. On a alors sur 1 m une chute de $1000 * 9,81 * 1 \simeq 1.10^4$ Pa, soit un dixième de la pression atmosphérique, ce qui est parfaitement détectable!

- 6 De manière évidente $E(z) = m g z$. Il s'agit de l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule. Cette expression montre la compétition entre le désordre induit par l'agitation thermique et l'ordre induit par la recherche du minimum d'énergie potentielle.

- 7 Il vient $c_g(z) = \frac{dn(z)}{d\tau}$ (on est obligé là aussi de travailler sur un volume mésoscopique $d\tau$...), soit $c_g(z) = \frac{P(z)}{R T_0} = \frac{P_0}{R T_0} A(z)$, ce qui est attendu en posant $c_{g0} = \frac{P_0}{R T_0}$.

I.A Étude d'un équilibre de sédimentation

- 8 Un grain est soumis à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de viscosité de la part du fluide.

- 9 L'application du principe fondamental de la dynamique donne alors $-V_b\mu_b \frac{dv}{dt} = -V_b\mu_b g + V_b\mu_e g + \alpha v$, qui se réécrit $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{\mu_b V_b} v = g \frac{\mu_b - \mu_e}{\mu_b}$.

La solution est $v(t) = v_\ell \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$ en posant $\tau = \frac{\mu_b V_b}{\alpha} = \frac{m_b}{\alpha}$ et $v_\ell = g \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b}{\alpha}$.

En régime permanent v atteint une vitesse limite v_ℓ , ce qui est de la forme attendue en posant $m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b$.

Dès l'équation initiale tout se passe comme si on pouvait ignorer la poussée d'Archimède et remplacer le poids par m^*g , d'où la dénomination de "masse apparente".

Numériquement $\tau \simeq 9$ ns (le régime transitoire est vraiment très court à notre échelle!!), et $v_\ell = 1,4 \cdot 10^{-8}$ m/s (chute très lente!!)

- 10 Il vient facilement $\dim(j) = L^{-2} \cdot T^{-1}$, puis $\dim(D) = L^2 \cdot T^{-1}$.

À l'équilibre il faut qu'il n'y ait plus de flux de particules, soit $\vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0}$, soit $-D \frac{dc}{dz} - cv_\ell = 0$, ou encore $\frac{dc}{dz} + \frac{v_\ell}{D} c = 0$.

La résolution donne $c(z) = c_0 \exp\left(-\frac{v_\ell}{D} z\right) = c_0 A(z)$ en posant $H_b = \frac{D}{v_\ell} = \frac{D\alpha}{m^*g} = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^*g}$.

- 11 Il n'y a que le poids apparent qui soit une force conservative. Dès lors comme dans la première partie $E(z) = m^*gz$. La constante H associée sera donc $H = \frac{k_b T_0}{m^*g}$. Par

identification avec $H_b = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^*g}$, il vient $D = \frac{k_b T_0}{6\pi\eta R_b}$.

- 12 Dans une tranche de hauteur dz , de volume Sdz on trouve $c(z)Sdz$ particules. En sommant entre 0 et h_1 (d'ailleurs prise infinie d'après l'énoncé) on tombe sur le nombre total N de particules, soit $N = \int_0^{+\infty} c(z)Sdz = H_b S c_0$, soit $c_0 = \frac{N}{H_b S}$.

- 13 Il vient facilement $c(z) = \frac{n(z)}{eS}$ car si $e \ll H_b$ on peut considérer que la distribution de grain est uniforme sur une hauteur e .

On a alors $n(z) = eSc(z) = eSc_0 \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right)$, d'où $\ln(n(z)) = \ln(eSc_0) - \frac{z}{H_b}$. Dans ce modèle le graphe de $\ln n$ en fonction de z est celle d'une droite de pente négative, ce qui semble compatible avec les mesures expérimentales.

Numériquement on a donc $H_b = \frac{1000}{24} = 41,66 \mu\text{m}$.

On note que $h_1 \simeq 2,5H_b$, ce qui était nécessaire pour avoir une variation significative de $n(z)$ avec l'altitude.

- 14 D'après les résultats précédents on a $k_B = \frac{m^*gH_b}{T_0} = \frac{4}{3}\pi R_b^3 (\mu_b - \mu_e) \frac{gH_b}{T_0} = 9,3 \cdot 10^{-24}$ J/K.

Les causes d'erreurs sont par exemple la détermination des altitudes où l'on compte, le fait que des particules sortent et rentrent en permanence dans la zone visualisée, l'hypothèse d'uniformité de la distribution sur une hauteur e , etc...

I.B Le modèle de Langevin

- 15 Il vient très facilement $m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_c - \alpha \vec{v}$. En l'absence de la force $\vec{F}_c$ le mouvement disparaît en quelques $\tau = \frac{m_b}{\alpha} = 9$ ns. À l'échelle humaine, c'est quasiment instantané.

- 16 Il vient $\frac{dxv}{dt} = v^2 + x\frac{dv}{dt}$, soit $x\frac{dv}{dt} = \frac{dxv}{dt} - v^2$.
- 17 Par définition la vitesse quadratique moyenne est la vitesse dont le carré est égal à la moyenne du carré des modules des vitesses. L'énergie cinétique d'un grain est $E_c = \frac{1}{2}m_b(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, ce qui montre que les trois composantes de la vitesse sont des degrés de liberté quadratique. Dès lors par le théorème d'équipartition de l'énergie la valeur moyenne de l'énergie cinétique vaut $\frac{3}{2}k_B T_0 = \frac{1}{2}m_b u^2$. Dès lors $u = \sqrt{\frac{3k_B T_0}{m_b}}$.
Mais attention ici on est à dans le cadre d'un modèle à une dimension... Dès lors il reste seulement $\frac{1}{2}k_B T_0 = \frac{1}{2}m_b u^2$, soit $u = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m_b}}$.
- 18 Comme $\varphi = \langle xv \rangle$, il semble pertinent de multiplier l'équation E_L scalairement par $x \vec{e}_x$
 $m_b x \frac{dv}{dt} = x F_c - \alpha x v$, ce qui compte tenu de la question 16 permet d'écrire $m_b \left(\frac{dxv}{dt} - v^2 \right) = x F_c - \alpha x v$. En passant à la valeur moyenne, en utilisant l'hypothèse $\langle x F_c \rangle = 0$, l'hypothèse ergodique et la définition de la vitesse quadratique il vient $m_b \left(\frac{d\varphi}{dt} - u^2 \right) = -\alpha \varphi(t)$, soit
$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varphi(t)}{\tau} = u^2$$

La résolution évidente donne $\varphi(t) = \tau u^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) = \frac{3k_B T_0}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{m_b}\right) \right)$.
- 19 On peut remarquer que $\frac{dx^2}{dt} = 2xv$. Dès lors en passant à la valeur moyenne et en utilisant l'hypothèse ergodique il vient $\frac{d\Psi(t)}{dt} = 2\varphi(t)$.
Par intégration il vient donc $\Psi(t) = Cte + \frac{6k_B T_0}{\alpha} t + \frac{k_B T_0}{\alpha} \frac{m_b}{\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha t}{m_b}\right)$.
À $t = 0$ comme $x(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, ce qui permet de déterminer la constante d'intégration :
$$\Psi(t) = \frac{2k_B T_0}{\alpha} t + \frac{k_B T_0}{\alpha} \frac{m_b}{\alpha} \left(\exp\left(-\frac{\alpha t}{m_b}\right) - 1 \right)$$

On a vu que $\tau = 9$ ns, ce qui permet pour l'observation humaine (en particulier ici l'observation a lieu toutes les 30 s) de considérer que le terme entre parenthèses est nul.
Il reste $\Psi(t) = \frac{2k_B T_0}{\alpha} t$, ce qui est de la forme attendue en posant $D_x = \frac{2k_B T_0}{\alpha}$.
- 20 La pente de la droite est $\frac{2k_B T_0}{\alpha}$ que l'on peut estimer graphiquement à $p = 1,55 \mu\text{m}^2/\text{s}^2$, soit $k_B = \frac{\alpha p}{2T_0}$. On en déduit numériquement $k_B = 1,19 \cdot 10^{-23}$ J/K. La valeur se rapproche de la valeur tabulée connue, mais il faudrait étudier les incertitudes pour conclure. Inversement la compatibilité permettrait de valider l'hypothèse ergodique (et d'autres hypothèses de Langevin).

II Observations Optiques

- 21 Dans les conditions de Gauss on utilise des rayons paraxiaux, i.e. des rayons proches de l'axe optique et peu inclinés sur lui. Je pense que c'est cela qu'on entend par "conditions". Évoquer le stigmatisme et de l'aplanétisme approchés dont on bénéficie alors est plus en rapport avec les conséquences qui découlent des conditions de Gauss.
- 22 Le schéma attendu est donné ci-après.
- 23 Il faut s'assurer que l'image intermédiaire soit dans le plan focal objet de la lentille L_2 . La relation de conjugaison de Newton permet donc d'écrire $\overline{F_1 A} \times \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2$, soit

$\frac{\overline{AF_1}}{f'_1} = \frac{f'_1}{F'_1 F_2} = \frac{f'_1}{\Delta} = 6,6 \cdot 10^{-3}$, ce qui montre qu'on peut effectivement confondre A et F_1 . Au passage cela montre que $\overline{AF_1} > 0$.

L'intérêt pour l'observateur de d'observer sans accommoder et donc sans fatigue oculaire. L'image intermédiaire est dans le plan focal objet de la lentille L_2 (il me semble qu'on a nécessairement répondu à cette question pour faire le calcul précédent...)

Si $\overline{AF_1} < 0$ l'image intermédiaire est nécessairement virtuelle, et donc en amont de la L_1 .

- 24 En utilisant la formule du grandissement de Newton et la définition de α' il vient facilement $P_i = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2} = 7,5 \cdot 10^3 \delta$.

Pour observer les grains de cette expérience (de taille $2R_b$), il faut qu'ils soient vus sous un angle supérieur à celui de résolution de l'oeil, à savoir $1' d'arc$. Dès lors la puissance

correspondante doit être au minimum de $\frac{\pi}{4 \cdot 10^{-7}} = 727 \delta$. C'est bien le cas avec notre microscope.

III Arc-en-ciel

VI Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

- 23 Les rayons incident, réfracté et réfléchi sont dans le plan d'incidence (défini par le rayon incident et la normale au dioptre). Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident et le rayon réfracté traverse la normale et les angles incident et réfracté sont liés par $\sin i = n \sin r$.
- 24 Un schéma montre facilement que le rayon incident "tourne" successivement de $i - r$ lors la première réfraction, de $\pi - 2r$ lors de la réflexion et à nouveau de $i - r$. Au total le rayon tourne de $\pi - 4r + 2i$, ce qui est bien le résultat attendu, soit $\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin(x)$
- 25 Le calcul de la dérivée de Δ par rapport à x donne $\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- Δ sera extremum pour l'annulation de la dérivée, ce qui donne facilement $4 - n^2 = 3x^2$ et donc $x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$.
- 26 Le graphe montre que pour de nombreux angles d'incidence (qui portent a priori le même éclaircissement) proches de l'angle correspondant à l'extremum on trouvera un même angle d'émergence. Il y a donc accumulation de lumière dans la direction $\Delta(x_m)$.
- 27 Pour $\lambda = 400 \text{ nm}$ et $n = 1,343$, $x_m = 0,8556$ et $\Delta_m = 139,35^\circ$ et pour $\lambda = 700 \text{ nm}$ et $n = 1,330$, $x_m = 0,8623$ et $\Delta_m = 137,48^\circ$.
- 28 Le schéma attendu est donné ci-après et montre que l'arc bleu est à l'intérieur et le rouge à l'extérieur.

VII Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel

- 29 (a) Prenons le milieu du spectre visible de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$, de période $T = \frac{\lambda}{c}$, donc de fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda}$, et donc de pulsation $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \simeq 3 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$.
- (b) La valeur moyenne est calculée sur le temps de réponse du récepteur, très grande devant la période des ondes lumineuses.
- (c) L'énoncé incite clairement à mener le calcul fait en cours dans le cas général en notation réelle (en effet si $\omega_1 \neq \omega_2$ l'amplitude résultante n'est pas sinusoïdale, et on ne

peut pas utiliser la notation complexe...). Il vient $s(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$.

Dès lors $I(P) = K \langle s(P, t)^2 \rangle =$

$$K \langle a_1^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) + a_2^2 \cos^2(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2) + 2a_1 a_2 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2) \rangle.$$

Compte tenu du fait que la période des ondes lumineuses est très petite devant le temps de réponse des récepteurs les valeurs moyennes des $\cos^2$ sont égales à $1/2$. Les deux premiers termes donnent donc $\frac{1}{2} K a_1^2 + \frac{1}{2} K a_2^2$ que l'on identifiera aux termes I_1 et I_2 attendus (ce sont d'ailleurs les intensités transportées par chacune des ondes séparément).

Pour le dernier terme il faut utiliser la transformation rappelée dans l'énoncé :

$$2a_1 a_2 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2) = a_1 a_2 (\cos((\omega_1 + \omega_2)t - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2)).$$

La valeur moyenne du premier terme est nulle quoi qu'il arrive (c'est un vrai cosinus dont la période est là aussi très grande devant le temps de réponse du récepteur).. Celle du deuxième terme est nulle aussi en général sauf si $\omega_1 = \omega_2$ (il y a d'autres subtilités que l'on a vues en cours mais qui ne semblent pas être à l'ordre du jour ici...)

On a donc $I(P) = 0$ si $\omega_1 \neq \omega_2$. En revanche si $\omega_1 = \omega_2$, le dernier terme est constant temporellement et égal à sa valeur moyenne, soit

$$I(P) = K a_1 a_2 \cos(-k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(-k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2).$$

- (d) Dans ce cas particulier $I(P) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{n\omega}{c}(x_2 - x_1)\right) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n(x_2 - x_1)\right)$, ce qui est bien ce qui est attendu avec $\delta(P) = n(x_2 - x_1)$.

- 30 Il s'agit du graphe d'une oscillation sinusoïdale de période λ , avec des oscillations entre $I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ et $I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$.

Sur la photo 5 on constate que les minima d'intensité sont quasiment nuls. Dès lors $I_1 \simeq I_2$.

- 31 Comme les rayons ressortent parallèles entre-eux ils interfèrent à l'infini.

- 32 La condition d'interférences constructives est évidemment $\delta(P) = k\lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'énoncé serait bien inspiré de définir ce qu'il appelle "écart angulaire"...

- 33 On doit avoir ainsi $-2\lambda = D((\cos i_2 - \cos i_1) - 2n(\cos r_2 - \cos r_1))$, expression dans laquelle tout est connu sauf D .

On inverse donc la formule pour tirer $D = \frac{-2\lambda}{(\cos i_2 - \cos i_1) - 2n(\cos r_2 - \cos r_1)} = 1,35 \text{ mm}$ (il faut bien sûr calculer de manière intermédiaire les angles de réfractions r_2 et r_1).