

ÉQUILIBRE EN MÉCANIQUE.

Soit le système représenté sur la figure ci-dessous.

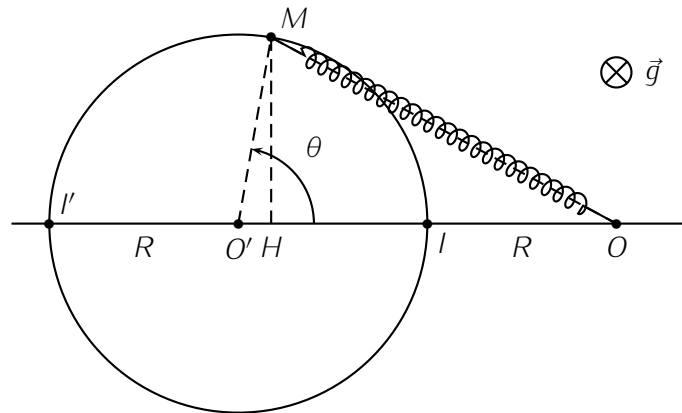


FIGURE 1 – Système mécanique

Un mobile M quasi ponctuel est astreint à se déplacer sans frottement le long d'un rail circulaire et **horizontal**. Le rayon du cercle est noté R et la position de M est donnée par l'angle θ .

En plus de la réaction du rail et de son poids, le point M est soumis à l'action d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .

On prend par ailleurs $IO = O'I = R$.

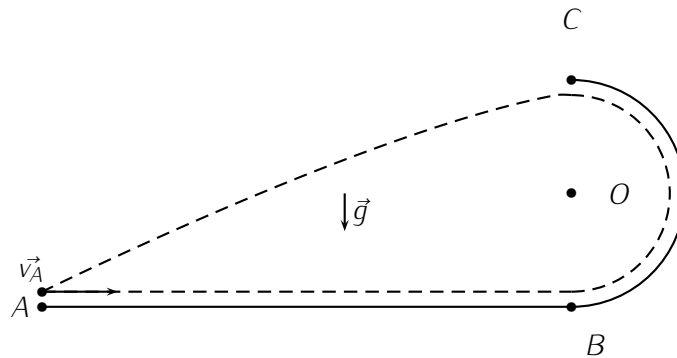
1. Montrer que la longueur l du ressort est lié à R et θ par la relation

$$l = OM = R\sqrt{5 - 4 \cos \theta}$$

2. Quelles sont les forces appliquées à M ?
3. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du système en fonction des données du problème et du paramètre θ .
4. Montrer que si l_0 vérifie des conditions que l'on précisera, il peut exister quatre positions d'équilibre différentes.
5. Tracez sur votre copie l'allure du graphe $E_p(\theta)$ pour $l_0 = \frac{5}{2}R$ (aucune étude de fonction n'est demandée, vous pouvez utiliser votre calculatrice).
6. Repérer sur le graphe précédent les positions d'équilibre et préciser leur stabilité. Justifiez vos réponses.
7. Comment l'allure du graphe évolue-t-elle si on augmente IO ? Aucun calcul supplémentaire n'est attendu.

LANCER DE BALLE

Le petit Philippe, qui fait ses premiers pas, montre déjà une précocité évidente pour les sciences. Il se saisit d'une balle, qu'il a reçue en cadeau à Noël, et la lance avec la main au niveau du point A , en direction du point B , avec une vitesse horizontale v_A . À partir du point B , la balle suit le guide circulaire vertical BC de rayon $R = OB = OC$. Le mouvement se fait sans frottement, y compris après le point C lorsque la balle a quitté le guide circulaire et se trouve dans l'air. Il observe que, suivant la vitesse avec laquelle il lance sa balle en direction de B , celle-ci retombe sur l'axe horizontal à gauche de A , ou à droite de A et même quelquefois exactement au point A de départ ! Il cherche les conditions à réunir pour que sa balle retombe à chaque fois en A ce qui lui permettra de rejouer un grand nombre de fois avec sa balle sans avoir à se déplacer sur l'axe Ax pour la récupérer... mais il se doute que les calculs risquent d'être un peu difficiles pour lui. Dans tout le problème, la balle sera assimilée à un point matériel M .



- Le tachymètre LASER qu'il a également reçu pour Noël et qui lui donne la norme V de la vitesse lorsque la balle atteint l'axe Ax (après être passée par les points B et C) donne un résultat qu'il trouve surprenant. Que vaut cette norme V de la vitesse, en fonction des paramètres de l'expérience? Justifiez.
- Intrigué par ce résultat, il se lance dans le calcul de la norme v_C de la vitesse en C . Que trouve-t-il pour v_C , en fonction de v_A et d'autres paramètres?
- Il constate qu'en lançant la balle moins fort depuis le point A , celle-ci arrive en C avec une vitesse plus faible et se demande (question Q1) s'il est possible de lancer la balle en A avec une vitesse telle que la balle arrive en C avec une vitesse nulle. Son prof de physique lui suggère, pour répondre à sa question Q1, de calculer la norme R_N de la réaction R_N exercée par le guide circulaire sur la balle, en un point M du guide repéré par $(\vec{OB}, \vec{OM}) = \theta$. Il le guide un peu dans ses calculs...
 - Quelle est, en fonction de v_A , g , R et θ , l'expression du carré de la norme $v(M)$ de la vitesse de la balle en un point M du guide circulaire?
 - Quelle est, en fonction de m , v_A , g , R et θ , l'expression au point M de R_N ?
 - Philippe vient de trouver la réponse à sa question (Q1), et vous? Justifiez.
 - Il reprend ses calculs et trouve la vitesse minimale $v_{A, \min}$ que doit avoir la vitesse de sa balle en A pour qu'elle atteigne le point C . Que trouve-t-il, en fonction de g et R , pour $v_{A, \min}$
- Cherchant toujours à déterminer les conditions expérimentales pour que la balle retombe exactement en A lorsqu'elle touche l'axe Ax il calcule pour cela les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de la balle après qu'elle a quitté le guide en C . Il a pris comme origine du repère le point B pour établir ses deux équations horaires et comme origine des temps l'instant de passage en C .
 - Que trouve-t-il pour ces deux équations horaires? Il a utilisé les paramètres t , g , R et v_C (vitesse de la balle en C).
 - Quelle est l'équation de la trajectoire de la balle après C ?
 - Quelles sont les composantes v_x et v_y de la vitesse à l'instant t ? Il a utilisé certains des paramètres t , g , R et v_C .
 - Quel est l'angle β fait, à l'instant t , par le vecteur vitesse \vec{v} avec l'axe Ax lorsque la balle touche l'axe Ax ? Il a utilisé certains des paramètres t , g , R et v_C .
 - Si on note T_3 la durée mise par la balle, depuis le point C , pour atteindre l'axe Ax , relier $v_x(T_3)$, $v_y(T_3)$ et v_A .
- Philippe, qui a également reçu en cadeau un chronomètre LASER pour Noël, décide de s'en servir pour mesurer la durée des trois phases AB puis BC puis CA . Il aimerait comparer les valeurs qu'il obtient avec les prévisions théoriques obtenues par les longs calculs qu'il s'apprête à effectuer.
 - Quelle est, en fonction de $d = AB$, g et R , la durée littérale T_1 de la première phase AB dans le cas où $v_A = 6\sqrt{gR}$?

- (b) Quelle est, en fonction de g et R , la durée littérale T_3 de la troisième phase CA dans le cas où $v_A = 6\sqrt{gR}$?
- (c) Que vaut alors, en fonction de R , l'expression littérale de $d = AB$ qui permettra à la balle de retomber en A ?
- (d) Exprimer alors, en fonction de g et R , la durée T_1 .
- (e) Comparer les durées des phases 1 et 2. Commenter.
6. La (douloureuse) seconde phase BC
- (a) Il a établi, pour la seconde phase, la relation entre $\dot{\theta}^2$, $\cos \theta$, g et R . Qu'a-t-il trouvé? $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire du point M repéré par l'angle θ sur le guide circulaire.
- (b) Il sait, depuis la naissance, que

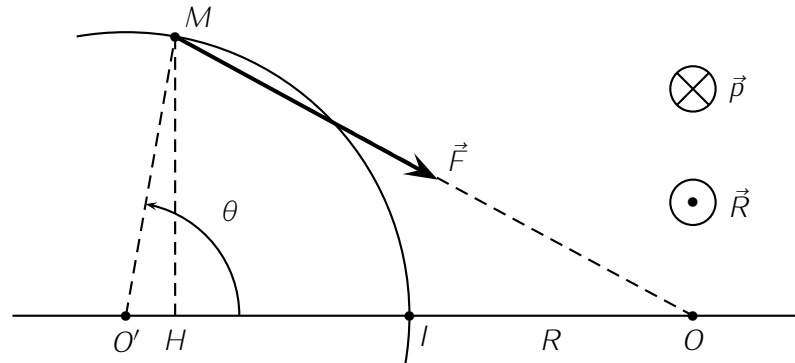
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = 0,762$$

- et peut donc en déduire, en fonction de g et R , la durée T_2 de la seconde phase. Quelle expression de T_2 a-t-il obtenue?
- (c) Il en déduit l'expression littérale, en fonction de g et de R , de la durée totale T du jeu vérifiant $T = T_1 + T_2 + T_3$. Que vaut T littéralement?
- (d) Application numérique : $R = 1$ m et $g = 10$ m.s⁻². Il peut enfin calculer numériquement T et comparer à la valeur qu'il obtient avec son chronomètre (1,50 s avec une incertitude type de 0.07 s). Est-ce que la modélisation est compatible avec l'expérience de Philippe? On répondra en calculant un écart-normalisé, ou z-score.

ÉQUILIBRE EN MÉCANIQUE.

1. Expression de OM en fonction de R et θ :

Contentez vous de recopier la partie "utile" du schéma mais tracez une figure



- le triangle MHO étant triangle en H , on a $OM^2 = OH^2 + HM^2$ (relation 1).
 - le triangle MHO' étant triangle en H on a aussi $\sin \theta = \frac{HM}{OM}$ d'où $HM = R \sin \theta$ (relation 2)
 - de même, $O'H = R \cos \theta = O'O - HO = 2R - HO$ d'où $HO = R(2 - \cos \theta)$ (relation 3).
- En utilisant les relations (2) et (3) dans (1),

$$OM^2 = R^2(2 - \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta = R^2(4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) + R^2 \sin^2 \theta$$

avec $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ d'où $OM = R\sqrt{5 - 4 \cos \theta}$ (toujours défini).

2. Les forces présentes sont :

- le poids du point matériel mais comme le cercle est horizontal, cette force ne travaille pas, l'énergie potentielle de pesanteur est constante et on la prend nulle.
- la réaction du cercle mais elle reste perpendiculaire au déplacement car il n'y a pas de frottement : ne travaille pas.
- la force de rappel du ressort qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,\text{él}}$.

Placez les forces sur la figure et préparez la réponse suivante, déjà lue, en citant les forces conservatives

3. Ici, la seule force conservative qui travaille est la force de rappel élastique du ressort et on a donc $E_p =$

$$E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \text{ avec } l = OM \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k \left[R\sqrt{5 - 4 \cos \theta} - l_0 \right]^2$$

L'expression $E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ n'est pas à démontrer

4. Pour déterminer les positions d'équilibre de ce système conservatif de paramètre θ , on utilise l'égalité $\frac{dE_p(\theta)}{d\theta} = 0$, vérifiée par les positions d'équilibre.

Il faut bien entendu utiliser les résultats en amont

Ici, cette équation devient :

$$\frac{d}{d\theta} \left[(R\sqrt{5 - 4 \cos \theta} - l_0)^2 \right] = 0 \Rightarrow 2(R\sqrt{5 - 4 \cos \theta} - l_0) \times \frac{R}{2\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \times 4 \sin \theta = 0$$

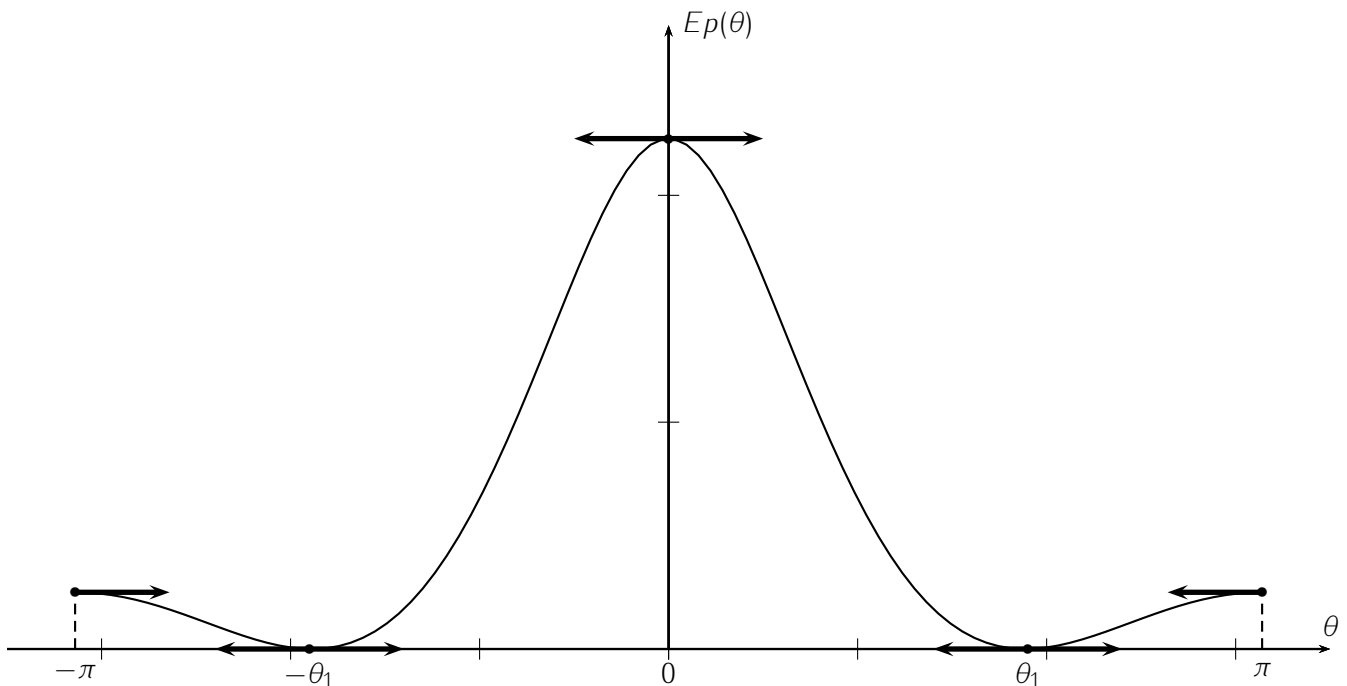
Ce produit s'annule si un des termes au numérateur est nul. On peut donc avoir,

- $\sin \theta = 0$ d'où $\theta = 0, M \text{ en } I$ ou $\theta = \pm\pi, M \text{ en } I'$ ou alors
- $R\sqrt{5 - 4 \cos \theta} - l_0 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right]$, positions définies si $-1 \leq \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right] \leq 1 \Rightarrow -4 - 5 \leq -\frac{l_0^2}{R^2} \leq 4 - 5 \Rightarrow 1 \leq \frac{l_0^2}{R^2} \leq 9 \Rightarrow R \leq l_0 \leq 3R$.

Finalement, si $R \leq l_0 \leq 3R$, il y a aussi les deux positions $\theta = \pm \arccos \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right]$

Vérifiez au moins au brouillon la cohérence des conditions

5. Pour donner l'allure du graphe $E_p(\theta)$ lorsque $l_0 = \frac{5}{2}R$ on peut tracer $(\sqrt{5 - 4 \cos \theta} - 2.5)^2$ en fonction de θ sur l'intervalle $-\pi \leq \theta \leq \pi$ car $E_p(\theta)$ sera proportionnelle à cette fonction.



6. $\theta = 0$ et $\theta = \pm\pi$ sont des positions d'équilibre instables (maxima de $E_p(\theta)$), elles correspondent respectivement à M en I avec le ressort comprimé et M en I' avec le ressort tendu.

Précisez la position de M sur le cercle

On repère également deux positions d'équilibres stables θ_1 et $-\theta_1$ (minima de $E_p(\theta)$) symétriques, elles correspondent aux valeurs de θ telles que $l = OM = l_0$.

D'ailleurs, en reportant dans la relation obtenue en 1., on obtient bien $OM = l_0 = R\sqrt{5 - 4 \cos \theta} \Rightarrow \theta = \pm \arccos \frac{1}{4}\left[5 - \frac{l_0^2}{R^2}\right] = \pm \arccos \frac{1}{4}\left[5 - \frac{25}{4}\right] = \pm \arccos \frac{-5}{4} \simeq \pm 108^\circ$.

7. Si on augmente Ol en maintenant le même rayon pour le cercle, les positions d'équilibre stables vont disparaître, et $\theta = 0$ deviendra une position d'équilibre stable.

LANCER DE BALLE

- Q1 1. On étudie la balle assimilée à un point matériel dans le référentiel local galiléen. Elle est soumise à son poids et à l'action du support. Le poids est une force conservative et l'action du support ne travaille pas, ainsi l'évolution est conservative. D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{initial}) = W_{A \rightarrow A}(\vec{P}) = 0$$

donc $V = v_A$.

- Q2 2. On applique à nouveau le théorème de l'énergie cinétique, entre A et C.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -2mgR$$

, soit $v_C = \sqrt{v_A^2 - 4mgR}$.

- Q3 3. (a) Encore une fois, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M repéré par l'angle θ .

$$\Delta E_c = -mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

. Soit, $v_M^2 = v_A^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$.

- Q4 (b) Cette fois-ci, on applique la seconde loi de Newton lorsque la balle est dans la partie circulaire.

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

. Soit, en projection sur \vec{e}_r :

$$-R_N + mg \cos \theta = -m \frac{v_M^2}{R}$$

. Ainsi :

$$R_N = m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_A^2}{R} \right)$$

- Q5 (c) Si la balle arrivait en C avec une vitesse nulle, on aurait $v_A = 2\sqrt{gR}$ et donc $R_N = mg(2 + 3 \cos(\theta))$. Au point C, $\theta = \pi$ et donc $R_N = -mg$! Ce n'est pas possible, R_N ne peut pas être négative. Il existe donc un angle θ pour lequel R_N s'annule et la balle qui le rail.

- Q6 (d) La vitesse minimale en A pour atteindre le point C est celle qui annule R_N en C et pas avant. Soit :

$$R_N(\pi) = m \left(-3g + 2g + \frac{v_{A,\text{min}}^2}{R} \right) = 0$$

ce qui donne $v_{A,\text{min}} = \sqrt{5gR}$.

- Q7 4. (a) À partir du point C et jusqu'à l'atterrissage en A on aura, avec une origine du repère en B :

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R$$

$$x(t) = -v_C t$$

Il s'agit d'une simple chute libre, on peut se permettre d'aller rapidement et de donner directement la réponse.

- Q8 (b) On exprime t en fonction de x et on substitue dans y pour trouver

$$y(x) = -\frac{g}{2v_C^2}x^2 + 2R$$

(c)

$$v_x = -v_C$$

- Q9 et $v_y = -gt$

- Q10 (d) On a $\tan \beta = \frac{v_y}{-v_C} = \frac{gt}{v_C}$.
- Q11 (e) L'énergie mécanique de la balle se conserve, et comme l'énergie potentielle en A est la même lorsque Philippe lance la balle que lorsqu'elle retombe, alors $E_C(A, \text{début}) = E_C(A, \text{fin})$ soit $v_A^2 = v_x(T_3)^2 + v_y(T_3)^2$.
- Q12 5. (a) La balle possède un mouvement rectiligne uniforme entre A et B donc $x(t) = v_A t$, la bille arrive en B à la date T_1 telle que $x(T_1) = d$, soit

$$T_1 = \frac{d}{6\sqrt{gR}}$$

- Q13 (b) La balle atteint le point C avec une vitesse v_C vérifiant $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -2mgR$ donc $v_C = 4\sqrt{2}\sqrt{gR}$. À partir du point C et jusqu'à l'atterrissage $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R$, la balle touche donc le sol à l'instant T_3 tel que $y(T_3) = 0$ soit $T_3 = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$.
- (c) L'équation horaire en $x(t)$ permet de trouver d :

$$x(T_3) = -d = -v_C T_3$$

donc

$$d = 8\sqrt{2}R$$

- Q14 (d) On peut donc trouver une nouvelle expression pour T_1 :

$$T_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

- Q15 On trouve donc $T_3 > T_1$, ce résultat est prévisible car la balle parcourt la même distance en x dans les deux cas, mais avec $v_C < v_A$.
6. La (douloureuse) seconde phase BC

- Q16 (a) Pour changer... on applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M sur le guide circulaire.

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m36gR$$

soit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(17 + \cos \theta)$$

- Q17 (b) On sépare les variables :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} dt$$

On cherche le temps T_2 pour aller de B en C, θ doit donc varier entre 0 et π . On intègre terme à terme :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} T_2$$

, ainsi $T_2 = 0,54\sqrt{\frac{R}{g}}$

- Q18 (c) Finalement $T = T_1 + T_2 + T_3 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} + 0,54 + 2 \right) = 4,42\sqrt{\frac{R}{g}}$.

- Q19 (d) L'application numérique donne $T = 1,40\text{s}$. L'écart normalisé avec la mesure donne

$$EN = \frac{|T - T_{mes}|}{u(T)} = \frac{0,1}{0,07} = 1,4 < 3$$

on peut considérer que la modélisation est conforme à l'expérience.