CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 10

Sujet 1 - Exercice 1

1. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \underbrace{x}_{\in E} - \underbrace{\lambda\langle x, u\rangle}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{u}_{\in E}$ donc $f(x) \in E$ en tant que combinaison linéaire de vecteurs de E.
Soit $(x, y) \in E^2$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha x + \beta y - \lambda\langle \alpha x + \beta y, u\rangle u = \alpha x + \beta y - \lambda(\alpha\langle x, u\rangle + \beta\langle y, u\rangle)u \\ &= \alpha x + \beta y - \alpha\lambda\langle x, u\rangle u - \beta\lambda\langle y, u\rangle u = \alpha(x - \lambda\langle x, u\rangle u) + \beta(y - \lambda\langle y, u\rangle u) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de E.
Soit $(x, y) \in E^2$. On a par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x - \lambda\langle x, u\rangle u, y\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle x, u\rangle\langle u, y\rangle.$$

En échangeant les noms de x et y, on a donc aussi :

$$\langle f(y), x\rangle = \langle y, x\rangle - \lambda\langle y, u\rangle\langle u, x\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle u, y\rangle\langle x, u\rangle = \langle f(x), y\rangle$$

par symétrie du produit scalaire.
On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme autoadjoint de } E.}$$

2. Résolvons l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in E$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \lambda\langle x, u\rangle u = x \Leftrightarrow \lambda\langle x, u\rangle u = 0_E \Leftrightarrow \langle x, u\rangle = 0$$

car $\lambda \neq 0$ et $u \neq 0_E$.
Ainsi :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \perp u \Leftrightarrow x \in \{u\}^\perp \Leftrightarrow x \in \big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp.$$

On a $\dim\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Vect}(u)\big) = n - 1 \geqslant 1$ car $u \neq 0_E$ et $n \geqslant 2$.
On en déduit que $\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp \neq \{0_E\}$ donc l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in E$ admet des solutions non nulles.
Cela signifie que :

$$\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } f}$$

et on a de plus $E_1 = \{x \in E,\ f(x) = x\} = \big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp$.
D'après le théorème spectral, comme f est un endomorphisme autoadjoint, f est diagonalisable donc la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.
Comme $\dim(E_1) = n - 1$, f admet donc une et une seule autre valeur propre μ et $\dim(E_\mu) = 1$.
On sait également que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux donc $E_\mu \subset (E_1)^\perp = \mathrm{Vect}(u)$. Par l'égalité des dimensions, on en déduit que $E_\mu = \mathrm{Vect}(u)$.
Enfin, $f(u) = u - \lambda\langle u, u\rangle u = (1 - \lambda\|u\|^2)u = \mu u$ avec $u \neq 0_E$ d'où $\mu = 1 - \lambda\|u\|^2$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1, 1 - \lambda\|u\|^2\},\ E_1 = \big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp \text{ et } E_{1-\lambda\|u\|^2} = \mathrm{Vect}(u).}$$

3. Soit $x \in E$.
On a $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\langle x,u\rangle^2\|u\|^2 - 2\lambda\langle x,u\rangle\langle x,u\rangle = \|x\|^2 + \lambda\langle x,u\rangle^2(\lambda\|u\|^2 - 2)$.
Si f est une isométrie vectorielle alors en particulier, $\|f(u)\| = \|u\|$ donc d'après ce qui précède utilisé avec $x = u$, on a $\lambda\langle u,u\rangle^2(\lambda\|u\|^2 - 2) = 0$ donc $\lambda\|u\|^2 - 2 = 0$ puisque $\lambda \neq 0$ et $\langle u,u\rangle = \|u\|^2 \neq 0$ car $u \neq 0_E$.
On en déduit que $\lambda = \dfrac{2}{\|u\|^2}$.
Réciproquement, si $\lambda = \dfrac{2}{\|u\|^2}$ alors d'après le calcul ci-dessus, on a pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ donc $\|f(x)\| = \|x\|$ (la norme d'un vecteur est toujours positive) donc f est une isométrie vectorielle.
Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est une isométrie vectorielle si et seulement si } \lambda = \frac{2}{\|u\|^2}.}$$

On a alors dans ce cas pour tout $x \in E$:

$$f(x) = x - 2\langle x, \frac{u}{\|u\|}\rangle \frac{u}{\|u\|} = x - 2p(x)$$

en notant p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$ car $\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u)$.
En notant $x = y + z$ avec $y \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$ et $z \in \mathrm{Vect}(u)$, on a alors :

$$f(x) = y + z - 2z = y - z.$$

On reconnaît la symétrie par rapport à $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$ avec $\dim(\mathrm{Vect}(u)) = 1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{dans ce cas, } f \text{ est la réflexion d'axe } \mathrm{Vect}(u).}$$

Sujet 1 - Exercice 2 (CCINP PC 2024)

Q1. Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 9X + 20 - 12 = (X-1)(X-8).$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples (1 et 8) donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 8\}$.
La matrice A est donc semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. En d'autres termes :

$$\boxed{\text{il existe } P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ matrice inversible telle que } A = PDP^{-1}.}$$

Q2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$B^3 = A \iff P^{-1}B^3P = P^{-1}AP \iff (P^{-1}BP)^3 = D \iff \Delta^3 = D.$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{B \text{ est une racine cubique de } A \text{ si et seulement si } \Delta = P^{-1}BP \text{ est une racine cubique de } D.}$$

Q3. On a $D = \Delta^3$ donc $D\Delta = \Delta^3\Delta = \Delta^4 = \Delta\Delta^3 = \Delta D$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{les matrices } D \text{ et } \Delta \text{ commutent.}}$$

Remarque : Plus généralement, tout polynôme en Δ commute avec Δ.

On note $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix}$ donc $8b = b$ et $c = 8c$ donc $b = c = 0$ d'où $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale.
Remarque : Autre rédaction possible, comme D et Δ commutent, les sous-espaces propres de D sont stables par Δ (c'est-à-dire stables par l'endomorphisme canoniquement associé à Δ) donc $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont stables par Δ. Ainsi, $\Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, ce qui signifie que la première colonne de Δ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, la deuxième colonne de Δ, $\Delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Par conséquent :

$$\boxed{\text{la matrice } \Delta \text{ est diagonale.}}$$

Q4. Soit Δ une racine cubique de D. On a donc $\Delta^3 = D$. D'après la question précédente, Δ est diagonale : $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ donc $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$ donc $a = 1$ et $d = 2$ d'où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Réciproquement, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = D$.

$$\boxed{\text{Il y a une unique racine cubique de } D : \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

On reprend les équivalences de Q2, pour $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en utilisant l'unicité de la racine cubique de D :

$$B^3 = A \Leftrightarrow (P^{-1}BP)^3 = D \Leftrightarrow P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \Leftrightarrow B = P\Delta P^{-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ possède une unique racine cubique, c'est } P\Delta P^{-1}.}$$

Q5. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe et $M = R_\theta$, d'après le cours :

$$\boxed{u \text{ est la rotation d'angle } \theta.}$$

Q6. *Remarque : Il fallait penser géométriquement : tourner 3 fois d'un angle de $\theta/3$ revient à tourner d'un angle θ et la multiplication matricielle est une traduction de la composition des applications linéaires.*
La matrice $R\left(\frac{\theta}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \end{pmatrix}$ vérifie $R\left(\frac{\theta}{3}\right)^3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ car d'après le cours $R\left(\frac{\theta}{3}\right)R\left(\frac{\theta}{3}\right)R\left(\frac{\theta}{3}\right) = R\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\theta}{3}\right)R\left(\frac{\theta}{3}\right) = R\left(\frac{2\theta}{3}+\frac{\theta}{3}\right) = R(\theta)$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ est une racine cubique de } M.}$$

Q7. D'après le cours, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $N = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on a donc $N^2 = S_\theta^2 = I_2$ (puisque $S_\theta S_\theta = R_{\theta-\theta} = I_2$) donc $N^3 = N$.
Ainsi :

$$\boxed{N \text{ est une racine cubique de } N.}$$

Q8. $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha^3 = \lambda$.
Par définition, $\alpha = \sqrt[3]{\lambda}$.
On a $(\sqrt[3]{\lambda} I_p)^3 = (\sqrt[3]{\lambda})^3 I_p = \lambda I_p = H_p(\lambda)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } \sqrt[3]{\lambda} I_p \text{ est une racine cubique de } H_p(\lambda).}$$

Q9. Comme A est diagonalisable, il existe P inversible tel que $A = P \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} P^{-1}$.

Posons $B = P \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt[3]{\lambda_d} I_{p_d} \end{pmatrix} P^{-1}$. On a :

$$B^3 = P \begin{pmatrix} (\sqrt[3]{\lambda_1})^3 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & (\sqrt[3]{\lambda_d})^3 I_{p_d} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

Ainsi, B est une racine cubique de A.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet une racine cubique.}}$$

Q10. Comme A est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A.
En effet, $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \neq 0$ car A est inversible donc 0 n'est pas racine de χ_A.
Ainsi :

$$\boxed{\text{les nombres } \lambda_1, \dots, \lambda_d \text{ sont non nuls.}}$$

Q11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 = \lambda$.
On a $z \neq 0$ car $\lambda \neq 0$. On note alors $z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a $\rho e^{i\theta} = z^3 = r^3 e^{3i\alpha}$ donc $r^3 = \rho$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3\alpha = \theta + 2k\pi$ et donc $\alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.
Cela donne trois solutions distinctes pour z :

$$z \in \left\{ \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}, \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3} + \frac{2i\pi}{3}}, \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3} + \frac{4i\pi}{3}} \right\}.$$

Réciproquement, on vérifie immédiatement que les trois nombres complexes ci-dessus vérifient $z^3 = \lambda$.

$$\boxed{\text{L'équation } z^3 = \lambda \text{ admet exactement trois solutions distinctes : } \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}, \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3} + \frac{2i\pi}{3}}, \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3} + \frac{4i\pi}{3}}.}$$

Q12. D'après la question précédente, en notant z_{1k}, z_{2k} et z_{3k} les trois racines cubiques de $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ ($\lambda_k \neq 0$ d'après Q10),

$$X^3 - \lambda_k = (X - z_{1k})(X - z_{2k})(X - z_{3k}).$$

Donc

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - z_{1k})(X - z_{2k})(X - z_{3k})$$

et $z_{ik} \neq z_{jk'}$ pour $k \neq k'$ car $z_{ik}^3 = \lambda_k$ et $z_{jk'}^3 = \lambda_{k'}$ et $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$.
On en déduit que

$$\boxed{\text{le polynôme } Q \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{C}.}$$

Q13. On suppose que B est une racine cubique de A. On a donc $B^3 = A$.
Comme A est diagonalisable, le polynôme $\Pi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) = \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A. On a alors $Q(B) = \prod_{k=1}^{d} (B^3 - \lambda_k I_n) = \prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n) = \Pi_A(A) = 0_n$.
Ainsi, le polynôme Q est un polynôme annulateur de B et comme il est scindé à racines simples d'après la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } B \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$