Centrale PC 2020 Math 1 - Corrigé

I. Cas des matrices detaille 2×2

1. • Par produit matriciel par blocs,

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 0_{n,n} \times 0_{n,n} + I_n \times (-I_n) & 0_{n,n} \times I_n + I_n \times 0_{n,n} \\ -I_n \times 0_{n,n} + 0_{n,n} \times (-I_n) & -I_n \times I_n + 0_{n,n} \times 0_{n,n} \end{pmatrix} = -I_{2n}.$$

• On a $J_n^T = \begin{pmatrix} 0_{n,n}^T & (-I_n)^T \\ I_n^T & 0_{n,n}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & -I_n \\ I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix} = -J_n$, donc $J_n \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.
• On a $J_n^T J_n J_n = J_n^T \times J_n^2 = (-J_n) \times (-I_{2n}) = J_n$, donc $J_n \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$.
• On a donc bien $J_n \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On a

$$M^T J_1 M = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} -ca + ac & -cb + ad \\ -da + bc & -db + bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \det(M) \\ -\det(M) & 0 \end{pmatrix},$$

donc on a bien

$$M \text{ symplectique } \Leftrightarrow MJ_nM = J_n \Leftrightarrow \det(M) = 1.$$

3. • Comme M est orthogonale, $M^T = M^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} M \text{ symplectique } &\Leftrightarrow M^T J_n M = J_n \Leftrightarrow M^{-1} J_n M = J_n \\ &\Leftrightarrow J_n M = M J_n \quad (\text{car } M \text{ est inversible}) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -x_1 & -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 & x_1 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -x_2 \\ y_2 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M_2 = -J_1 M_1 \quad \left(\text{car } J_1 M_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

4. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
Alors, en posant $X_2 = -J_1 X_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, on a

$$\|X_2\|^2 = x_2^2 + x_1^2 = \|X_1\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \langle X_1, X_2 \rangle = x_1(-x_2) + x_2 x_1 = 0,$$

donc la famille (X_1, X_2) est orthonormale, donc libre et formée de 2 vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 2, donc c'est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc $M = \left(X_1 \mid X_2 \right)$ est orthogonale.
De plus, d'après la question précédente, comme $X_2 = -J_1 X_1$ et M orthogonale, M est aussi symplectique.

5. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique.
Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée donc il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = D$ avec D diagonale.
Comme P est orthogonale, on a $\det(P) \in \{-1, 1\}$.
Si $\det(P) = 1$ alors P est symplectique d'après la question Q.2 et si $\det(P) = -1$ alors en notant Q la matrice déduite de P en multipliant sa première colonne par -1, on a $\det(Q) = 1$ donc Q symplectique, Q orthogonale (puisque la famille de ses colonnes reste orthonormée) et $Q^{-1}MQ = D$ (car la première colonne de Q est toujours un vecteur propre de M associé à la même valeur propre que la première colonne de P).
On a donc bien le résultat souhaité.

6. • Si $M \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = aJ_1$.
On a donc $\det(M) = a^2 \det(J_1) = a^2$, donc

$$M \text{ symplectique } \Leftrightarrow \det(M) = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Les seules matrices de taille 2×2 à la fois antisymétriques et symplectiques sont donc J_1 et $-J_1$.
• On a $\chi_{J_1}(X) = \chi_{-J_1}(X) = X^2 + 1$ qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc J_n et $-J_n$ ne sont pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II. Cas des matrices symplectiques et orthogonales

On a donc, pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\qquad \varphi(X,Y) = X^T KY = \langle X, KY\rangle = \left\langle K^T X, Y\right\rangle$.

7. • $\varphi : (\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$ par définition de φ.
 • Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,
 — $X \mapsto \varphi(X,Y) = \langle X, KY\rangle$ est linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire.
 — $X \mapsto \varphi(Y,X) = \left\langle K^T Y, X\right\rangle$ est linéaire par linéarité à droite du produit scalaire.
 • φ est donc bien une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

8. • Soit $X \in \mathbb{R}$.
 Comme $\varphi(X,X) \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(X,X) = \varphi(X,X)^T$. Or,

$$(\varphi(X,X))^T = (X^T KX)^T = X^T K^T (X^T)^T = X^T K^T X = X^T(-K)X = -X^T KX = -\varphi(X,X),$$

 donc $\varphi(X,X) = -\varphi(X,X)$, donc $\varphi(X,X) = 0$. φ est donc alternée.
 • Pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\varphi(X+Y, X+Y) = 0$ car φ est alternée.
 Or, par bilinéarité de φ, on a aussi

$$\varphi(X+Y, X+Y) = \underbrace{\varphi(X,X)}_{=0} + \varphi(X,Y) + \varphi(Y,X) + \underbrace{\varphi(Y,Y)}_{=0} = \varphi(X,Y) + \varphi(Y,X),$$

 donc on a bien $\varphi(X,Y) = -\varphi(Y,X)$.
 Pour ce deuxième point, l'énoncé attendait peut-être plutôt une preuve du style : $\varphi(X,Y)^T = \varphi(X,Y)$ *car* $\varphi(X,Y) \in \mathbb{R}$.
 Or

$$(\varphi(X,Y))^T = (X^T KY)^T = Y^T K^T (X^T)^T = Y^T K^T X = Y^T(-K)X = -Y^T KX = -\varphi(Y,X),$$

 donc on a bien $\varphi(X,Y) = -\varphi(Y,X)$.

9. *Comme* J_n *est antisymétrique, tous les résultats des questions 7 et 8 restent valables.*
 Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$J_n Y = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \\ -y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

 donc

$$\begin{aligned}
\varphi(X,Y) = X^T J_n Y = \sum_{k=1}^{2n} x_k (J_n Y)_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k} + \sum_{k=n+1}^{2n} x_k(-y_{k-n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k} + \sum_{j=1}^{n} x_{j+n}(-y_j) \quad \text{(en posant } j = k-n\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).
\end{aligned}$$

10. Soit $(i,j) \in \{1, \dots 2n\}^2$.
 En prenant $X = e_i$, on a $x_k = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$.
 En prenant $Y = e_j$, on a $y_k = \delta_{j,k}$ pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$.
 D'où, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\varphi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k) &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k+n} - \delta_{i,k+n}\delta_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k+n} - \delta_{i,k+n}\delta_{j,k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \delta_{i,k} \underbrace{\delta_{j,k+n}}_{=0 \text{ car } j \le 2n < k+n} - \underbrace{\delta_{i,k+n}}_{=0 \text{ car } i \le 2n < k+n} \delta_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \delta_{i,k}\delta_{j,k+n} - \delta_{i,k+n}\delta_{j,k}
\end{aligned}$$

 Or

$$\delta_{i,k}\delta_{j,k+n} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = i \\ k+n = j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = i \\ j = i+n \end{cases}$$

donc $\delta_{i,k}\delta_{j,k+n} = \delta_{i,k}\delta_{j,i+n}$.
De même, $\delta_{i,k+n}\delta_{j,k} = \delta_{j,k}\delta_{i,j+n}$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi(e_i,e_j) &= \sum_{k=1}^{2n} \delta_{i,k}\delta_{j,i+n} - \delta_{i,j+n}\delta_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \delta_{i,k}\delta_{j,i+n} - \sum_{k=1}^{2n} \delta_{i,j+n}\delta_{j,k} \\
&= \delta_{i,i}\delta_{j,i+n} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{2n} \underbrace{\delta_{i,k}}_{=0}\,\delta_{j,i+n} - \delta_{i,j+n}\delta_{j,j} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{2n} \delta_{i,j+n}\,\underbrace{\delta_{j,k}}_{=0} \\
&= \delta_{j,i+n} - \delta_{i,j+n} = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}.
\end{aligned}$$

On peut aussi le démontrer en distinguant des cas.

11. • Comme φ est alternée, on a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, J_n X\rangle = \varphi(X,X) = 0,$$

donc on a bien $J_n X \in X^\perp$.
• On a

$$\varphi(J_nX,X) = (J_nX)^T J_n X = X^T J_n^T J_n X = -X^T J_n^2 X = -X^T(-I_{2n})X = X^T X = \|X\|^2$$

car J_n est antisymétrique et $J_n^2 = -I_{2n}$ d'après la question 1.

12. Si $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
Y \in X^{J_n} &\Leftrightarrow \varphi(Y,X) = 0 \quad \text{(par définition de } X^{J_n}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \langle Y, J_n X\rangle = 0 \quad \text{(d'après la remarque préliminaire de la partie)} \\
&\Leftrightarrow Y \in (J_nX)^\perp,
\end{aligned}$$

donc on a bien $X^{J_n} = (J_nX)^\perp$.

13. • Comme P est orthogonale, la famille formée par ses vecteurs colonnes est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, donc

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,2n]\!], \quad \|X_i\| = 1 \\ \forall (i,j) \in [\![1,2n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow X_i \perp X_j \end{cases}.$$

• Pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$, on a $X_i = Pe_i$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,2n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
\varphi(X_i,X_j) &= X_i^T J_n X_j \quad \text{(par définition de } \varphi\text{)} \\
&= (Pe_i)^T J_n (Pe_j) = e_i^T (P^T J_n P) e_j \\
&= e_i J_n e_j \quad \text{(car } P \text{ est symplectique)} \\
&= \varphi(e_i,e_j) \quad \text{(par définition de } \varphi\text{)} \\
&= \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} \quad \text{(d'après la question 10).}
\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat attendu.

14. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Soit $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On décompose Z sur la base orthonormée $(X_1, X_2, \dots, X_{2n})$:

$$Z = \sum_{j=1}^{2n} z_j X_j \quad \text{avec, pour tout } j \in \{1,\dots,2n\},\ z_j =< Z, X_j >$$

On calcule, avec la bilinéarité de φ :

$$\varphi(X_i,Z) = \sum_{j=1}^{2n} z_j \varphi(X_i,X_j) = \sum_{j=1}^{2n} z_j(\delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n})$$

Or $i \in \{1,\dots,n\}$, donc pour tout $j \in \{1,\dots,2n\}$, $\delta_{i,j+n} = 0$. Dès lors :

$$\varphi(X_i,Z) = \sum_{j=1}^{2n} z_j \delta_{i+n,j} = z_{i+n} =< Z, X_{i+n} > .$$

Cette dernière égalité prouve que $Z \in X_i^{J_n}$ si, et seulement si Z est orthogonal à X_{i+n} : $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

15. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Les questions **Q 12.** et **Q 14.** montrent que $X_{i+n}^\perp = (J_nX_i)^\perp$.
Or pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $(X^\perp)^\perp = (\mathrm{Vect}(X)^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(X)$, donc $\mathrm{Vect}(J_nX_i) = \mathrm{Vect}(X_{i+n})$.
Par conséquent, il existe un réel α tel que $X_{i+n} = \alpha J_n X_i$.
En utilisant la bilinéarité de φ et la question **Q 11.**,

$$\varphi(X_{i+n},X_i) = \alpha\varphi(J_nX_i,X_i) = \alpha\|X_i\|^2 = \alpha$$

D'autre part, on a vu en **Q 13.** que $\varphi(X_i,X_{i+n}) = \delta_{i+n,i+n} - \delta_{i,i+2n} = 1$, donc vu que φ est antisymétrique,

$$\varphi(X_{i+n},X_i) = -1$$

En définitive, $X_{i+n} = \alpha J_n X_i$, avec $\alpha = -1$: $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ X_{i+n} = -J_nX_i$

III. Quelques généralités sur les matrices symplectiques

16. Soit M une matrice symplectique. On a $M^T J_n M = J_n$. En passant au déterminant, comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det(A^T) = \det(A)$, on a :
$$\det(J_n) = \det(M^T J_n M) = \det(M^T)\det(J_n)\det(M) = (\det(j_n)(\det(M))^2,$$
donc, comme $\det(J_n) \neq 0$ (car $J_n^2 = -I_{2n}$, donc J_n inversible), on a $(\det(M))^2 = 1$, donc $\det(M) = \pm 1$.
17. Soit M une matrice symplectique. Alors, comme $\det(M) = \pm 1 \neq 0$, M est inversible.
De plus, on a $M^T J_n M = J_n$, donc, en multipliant à gauche par $(M^T)^{-1}$ et à droite par M^{-1}, on a
$$(M^T)^{-1} M^T J_n M M^{-1} = (M^T)^{-1} J_n M^{-1}, \quad \text{donc} \quad J_n = (M^T)^{-1} J_n M^{-1}.$$
Enfin, comme $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$, on a
$$(M^{-1})^T J_n M^{-1} = J_n,$$
donc M^{-1} est symplectique.
18. • Soient M et N deux matrices symplectiques. Alors $M^T J_n M = J_n$ et $N^T J_n N = J_n$, donc
$$(MN)^T J_n MN = N^T \underbrace{M^T J_n M}_{=J_n} N = N^T J_n N = J_n,$$
donc MN est encore symplectique.
• Comme $0_{2n,2n} \notin \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ (car $0_{2n,2n}^T J_n 0_{2n,2n} = 0_{2n,2n} \neq J_n$), $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

IV. Réduction des matrices symétriques et symplectiques

IV.A - Propriété

Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$.

19. Soit λ une valeur propre de M et $X \neq 0$ un vecteur propre associé.
Comme M est inversible (par exemple car $\det(M) \neq 0$), on a $\lambda \neq 0$.
Comme J_n est inversible et $X \neq 0$, on a $J_n X \neq 0$ et, comme $MX = \lambda X$ et $M^T J_n M = J_n$ et M symétrique, on a
$$J_n X = M^T J_n M X = M J_n(\lambda X) = \lambda M(J_n X),$$
donc $M(J_n X) = \dfrac{1}{\lambda}(J_n X)$.
$J_n X \neq 0$ est donc un vecteur propre de M associé à la valeur propre $1/\lambda$.
20. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une base de E_λ.
• Comme J_n est inversible et $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre, $(J_n X_1, \ldots, J_n X_p)$ est une famille libre.
• D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $J_n X_i \in E_{1/\lambda}$.
• Notons $h : Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \mapsto J_n Z$.
Comme J_n est inversible, h est un automorphisme de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.
Pour tout $X \in E_\lambda$, $J_n X \in E_{1/\lambda}$, donc $h(E_\lambda) \subset E_{1/\lambda}$, donc
$$\dim(E_{1/\lambda}) \geq \dim(h(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \quad (\text{car } h \text{ est bijectif}).$$
En remplaçant λ par $1/\lambda$, on a aussi, pour tout $X \in E_{1/\lambda}$, $J_n X \in E_{1/(1/\lambda)} = E_\lambda$, donc $h(E_{1/\lambda}) \subset E_\lambda$, donc
$$\dim(E_\lambda) \geq \dim(h(E_{1/\lambda})) = \dim(E_{1/\lambda}) \quad (\text{car } h \text{ est bijectif}).$$
On a donc $\dim(E_{1/\lambda}) = \dim(E_\lambda) = p$.
• La famille $(J_n X_1, \ldots, J_n X_p)$ est donc libre et formée de p éléments de $E_{1/\lambda}$, espace vectoriel de dimension p, donc c'est une base de $E_{1/\lambda}$.
21. Soit $Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_p, J_n Y_1, \ldots, J_n Y_p))^\perp$, alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,
$$\langle Y, J_n Y_i \rangle = \langle Y, Y_i \rangle = 0, \quad \text{donc} \quad Y^T J_n Y_i = Y^T Y_i = 0.$$
Par suite, comme $J_n = -J_n^T$ (J_n est antisymétrique), on a
$$0 = Y^T J_n Y_i = Y^T(-J_n^T) Y_i = -Y^T J_n^T Y_i = -(J_n Y)^T Y_i = -\langle J_n Y, Y_i \rangle,$$
donc $\langle J_n Y, Y_i \rangle = 0$.
De plus, comme $J_n^2 = -I_{2n}$, on a aussi
$$0 = Y^T Y_i = Y^T I_{2n} Y_i = Y^T(-J_n^2) Y_i = Y^T(-J_n) J_n Y_i = Y^T J_n^T J_n Y_i = (J_n Y)^T J_n Y_i = \langle J_n Y, J_n Y_i \rangle.$$
On a donc bien $J_n Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_p, J_n Y_1, \ldots, J_n Y_p))^\perp$.

22. • Si $E_1 = \{0\}$, alors la dimension de E_1 est paire. (dans ce cas-là, pas de base).
• Sinon, il existe $X_1 \neq 0$ dans E_1. Quitte à le normaliser, supposons-le unitaire.
Alors, d'après la question 19, $J_n X_1$ est aussi dans E_1 (car $1/1 = 1$).
De plus, $\|J_n X_1\|^2 = (J_n X_1)^T J_n X_1 = X_1^T J_n^T J_n X_1 = X_1^T (-J_n^2) X_1 = X_1^T I_{2n} X_1 = X_1^T X_1 = \|X_1\|^2 = 1$, donc $J_n X_1$ est aussi unitaire.
Enfin, d'après la question 11, $J_n X_1 \in X_1^\perp$, donc $J_n X_1 \perp X_1$. La famille $(X_1, J_n X_1)$ est donc orthonormée, donc c'est une famille libre d'éléments de E_1, donc $\dim(E_1) \geq 2$.
Si $\dim(E_1) = 2$, $(X_1, J_n X_1)$ est une famille libre à deux éléments de E_1, donc $(X_1, J_n X_1)$ est une base orthonormée de E_1.
• Sinon, il existe $X_2 \in E_1 \cap \mathrm{Vect}(X_1, J_n X_1)^\perp$.
Comme $X_2 \in E_1$, $J_n X_2 \in E_1$ et ...
• Supposons construite $(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1})$ une famille orthonormée de vecteurs de E_1 et supposons que $\dim(E_1) > 2(p-1)$. Alors il existe $X \in E_1 \setminus \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1})$, et, en orthonormalisant la famille $(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1}, X)$ (ce qui ne modifiera pas les $2p-2$ permiers vecteurs), on trouve un vecteur unitaire X_p tel que $(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1}, X_p)$ soit une famille orthonormée de vecteurs de E_1.
On peut aussi choisir un vecteur unitaire dans $(\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1}))^\perp$...
Alors, d'après la question 19, $J_n X_p$ est aussi dans E_1.
De plus, comme dans le premier point, on obtient $\|J_n X_p\| = 1$, donc $J_n X_p$ est unitaire.
D'après la question 21, comme $X_p \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1})^\perp$, on a

$$J_n X_p \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{p-1}, JX_1, \ldots, JX_{p-1})^\perp.$$

Enfin, d'après la question 11, $J_n X_p \in X_p^\perp$, donc $J_n X_p \perp X_p$.
La famille $(X_1, \ldots, X_p, JX_1, \ldots, JX_p)$ est donc othonormée, donc c'est une famille libre d'éléments de E_1, donc $\dim(E_1) \geq 2p$.
Si $\dim(E_1) = 2p$, $(X_1, \ldots, X_p, JX_1, \ldots, JX_p)$ est une famille libre à $2p$ éléments de E_1, donc $(X_1, \ldots, X_p, JX_1, \ldots, JX_p)$ est une base orthonormée de E_1.
Sinon, on itère le procédé.
• On est sûr que le procédé termine car $\dim(E_1) \leq \dim(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})) = 2n$, et on construit donc bien ainsi une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_p, JX_1, \ldots, JX_p)$ de E_1 (pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$), et on a donc $\dim(E_1) = 2p$.

23. Le même procédé marche à l'identique pour E_{-1} (car $1/(-1) = -1$), permettant ainsi de construire une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_k, JX_1, \ldots, JX_k)$ de E_{-1}, qui est donc un espace vectoriel de dimension $2k$.

24. Comme M est symétrique, on a

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \\ \lambda \neq \pm 1}}} (E_\lambda \oplus E_{1/\lambda}) \oplus^\perp E_1 \oplus^\perp E_{-1} = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}).$$

Pour tout $|\lambda| > 1$ dans $\mathrm{Sp}(M)$, on constuit une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_{n_\lambda})$ de E_λ.
Alors $(J_n X_{1,\lambda}, \ldots, J_n X_{n,\lambda})$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et $\|J_n X_{i,\lambda}\| = \|X_{i,\lambda}\| = 1$ et, pour tout $i \neq j$,

$$\langle J_n X_{i,\lambda}, J_n X_{j,\lambda}\rangle = (J_n X_{i,\lambda})^T J_n X_{j,\lambda} = X_{i,\lambda}^T (J_n^T J_n) X_{j,\lambda} = X_{i,\lambda}^T I_{2n} X_{j,\lambda} = X_{i,\lambda}^T X_{j,\lambda} = \langle X_{i,\lambda}, X_{j,\lambda}\rangle = 0,$$

donc la famille $(J_n X_{1,\lambda}, \ldots, J_n X_{n,\lambda})$ est une base orthonormée de $E_{1/\lambda}$.
On a vu que, si $E_1 \neq \{0\}$, on pouvait constuire une base orthonormée $(X_{1,1}, \ldots, X_{p,1}, J_n X_{1,1}, \ldots, J_n X_{p,1})$ de E_1.
De même pour E_{-1}.
D'où, en construisant une base dans laquelle on met d'abord tous les X_i, puis tous les $-J_n X_i$ dans le même ordre (on met $-J_n X_i$ suite à la question 15), et en prenant P la matrice de passage de la base canonique à la base ainsi formée, alors P est orthogonale (matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée).
De plus, par construction, $P^T M P$ est une matrice diagonale de la forme voulue.
Enfin, d'après les propriétés des matrices de changement de base, $P^T J_n P = P^{-1} J_n P$ est la matrice de l'application $j_n : X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \mapsto J_n X$ dans la base $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n, -J_n X_1, \ldots, -J_n X_n)$, donc

$$\begin{aligned} P^T J_n P &= Mat_{\mathcal{B}}(J_n X_1, \ldots, J_n X_n, -J_n^2 X_1, \ldots, -J_n^2 X_n) \\ &= Mat_{\mathcal{B}}(J_n X_1, \ldots, J_n X_n, X_1, \ldots, X_n) = J_n, \end{aligned}$$

donc P est bien symplectique.
Ce dernier point de la démonstration, avec le résultat de la question 15, permet de montrer que : Si $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ et si on note $X_1, \ldots, X_{2n}$ les colonnes de P, alors

$$P \text{ symplectique} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad X_{i+n} = -JX_i.$$

IV.B - Mise en application sur un exemple

25. Il est clair que A est symétrique réelle. De plus,

$$AJ_2A = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 9 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 9 \\ -9 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -9 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = J_2,$$

donc A est aussi symplectique.

26. On a $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 1/2\}$ et 1 est valeur propre double.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$. On pose alors $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

(X_1) est une base orthonormée de E_2.

D'après ce qui précède, $J_2X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ est une base orthonormée de $E_{1/2}$.

On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$. On pose alors $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $JX_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, d'après ce qui précède, (X_2, JX_2) est une base orthonormée de E_1.

On forme alors la base orthonormée $(X_1, X_2, -JX_1, -JX_2)$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et on pose

$$P = Mat_{\mathcal{BC}}(X_1, X_2, -JX_1, -JX_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par construction, P est orthogonale, $P^TAP = \mathrm{diag}(2, 1, 1/2, 1)$ et P est symplectique, donc P répond au problème posé.

V. Etude du cas des matrices antisymétriques

V.A - Un peu de théorie

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit m l'application linéaire canoniquement associée à M.

27. • S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de M, alors il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. On a alors

$$\begin{aligned} &\langle X, MX\rangle = \langle X, \lambda X\rangle = \lambda\|X\|^2 \\ \text{et}\quad &\langle X, MX\rangle = X^TMX = -X^TM^TX = -(MX)^TX = -(\lambda X)^TX = -\lambda\langle X, X\rangle = -\lambda\|X\|^2, \end{aligned}$$

donc $2\lambda\|X\|^2 = 0$, donc, comme $\|X\|^2 \neq 0$ (car $X \neq 0$), on a $\lambda = 0$.

On a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0\}$.

• Or, comme M est symplectique, M est inversible, donc $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

28. M^2 est une matrice symplectique comme produit de matrices symplectiques.
De plus, $(M^2)^T = M^TM^T = (-M)(-M) = M^2$, donc M^2 est symétrique.
D'où, d'après la question 26, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que P^TM^2P soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_{2n}$ avec, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.
De plus, il existe une base $(X_1, \ldots, X_n, -JX_1, \ldots, -JX_n)$ telle que P soit la matrice de cette base dans la base canonique.

29. Comme X est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ, on a $M^2X = \lambda X$. Par suite,
— $M^2MX = M(M^2X) = M(\lambda X) = \lambda MX$ et $MX \neq 0$ car M inversible et $X \neq 0$, donc MX est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ.
— Comme M^2 est symétrique et symplectique et X est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ, J_nX est encore un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre $1/\lambda$ d'après la question 19.
— De même, MX est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ, donc $J_n(MX) = J_nMX$ est encore un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre $1/\lambda$.

30. • Pour tout $Y = aX + bMX + cJ_nX + dJ_nMX \in \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$,

$$\begin{aligned}
MY &= aMX + bM^2X + cMJ_nX + dMJ_nMX \\
&= aMX + b\lambda X + cM(M^TJ_nM)X - dM^TJ_nMX \quad \text{(car } M \text{ est symplectique et } M \text{ antisymétrique et } X \in E_\lambda(M^2)) \\
&= aMX + b\lambda X - cM^2J_nMX - dJ_nX \quad \text{(car } M \text{ est symplectique et } M \text{ antisymétrique)} \\
&= aMX + b\lambda X - \frac{c}{\lambda}J_nMX - dJ_nX \quad \text{(car } J_nMX \in E_{/\lambda}(M^2)),
\end{aligned}$$

donc $MY \in F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$, donc F est stable par M.
• Pour tout $Y = aX + bMX + cJ_nX + dJ_nMX \in \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$,

$$\begin{aligned}
J_nY &= aJ_nX + bJ_nMX + cJ_n^2X + dJ_n^2MX \\
&= aJ_nX + bJ_nMX - cX - dMX \quad \text{(car } J_n^2 = -I_{2n}),
\end{aligned}$$

donc $J_nY \in F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$, donc F est stable par J_n.

31. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M^2 et X un vecteur propre associé. Alors

$$\begin{aligned}
&\left\langle X, M^2X \right\rangle = \langle X, \lambda X \rangle = \lambda \|X\|^2 \\
\text{et} \quad &\left\langle X, M^2X \right\rangle = X^TM^2X = -X^TM^TMX = -(MX)^T(MX) = -\langle MX, MX \rangle = -\|MX\|^2,
\end{aligned}$$

donc, comme $\|X\| \neq 0$ (car $X \neq 0$), on a

$$\lambda = -\frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \leq 0.$$

Comme de plus $\lambda \neq 0$ (car $M^2 = M \times M$ est inversible), on a bien $\lambda < 0$.

32. Supposons $\lambda \neq -1$, et X un vecteur propre associé de norme 1 et $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$.
• Pour toute matrice antisymétrique A, pour tout vecteur Y, on a

$$\langle Y, AY \rangle = Y^TAY = -Y^TA^TY = -(AY)^TY = -\langle AY, Y \rangle = -\langle Y, AY \rangle,$$

donc $\langle Y, AY \rangle = 0$, donc $Y \perp AY$.
Par suite, comme M et J_n sont antisymétriques, on a

$$X \perp MX, \quad X \perp J_nX \quad \text{et} \quad MX \perp J_nMX.$$

• Pour toute matrice symétrique, les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc, comme

$$\mathrm{Vect}(X, MX) \subset E_\lambda(M^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(J_nX, J_nMX) \subset E_{1/\lambda}(M^2),$$

où $\lambda \neq 1/\lambda$ (car $\lambda \neq -1$ et, comme $\lambda < 0$, on a aussi $\lambda \neq 1$), on a $\mathrm{Vect}(X, MX) \perp \mathrm{Vect}(J_nX, J_nMX)$, donc, en particulier, on a aussi :

$$X \perp J_nMX \quad \text{et} \quad MX \perp J_nX.$$

• Enfin, $\langle J_nX, J_nMX \rangle = (J_nX)^TJ_nMX = X^TJ_n^TJ_nMX \underset{\text{car } J_n \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})}{=} X^TMX = \langle X, MX \rangle = 0$, donc $J_nX \perp J_nMX$.

• La famille $\left(X, \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$ est donc orthogonale.
De plus, elle est composée de vecteurs unitaires car X est unitaire, J_nX est unitaire car J_n est orthogonale, $\|MX\|^2 = -\lambda\|X\|^2 = -\lambda$ (d'après la question 31), donc $\|MX\| = \sqrt{-\lambda}$ et, comme J_n orthogonale, $\|J_nMX\| = \|MX\| = \sqrt{-\lambda}$.
C'est donc une famille orthonormée, donc libre, donc $F = \mathrm{Vect}\left(X, \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$ est de dimension 4.
• On a

$$\begin{aligned}
m(X) &= MX = -\sqrt{-\lambda}\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, \\
m\left(\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX\right) &= -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}M^2X = \frac{-\lambda}{\sqrt{-\lambda}}X = \sqrt{-\lambda}X, \\
m(-J_nX) &= -MJ_nX = -MM^TJ_nMX \quad \text{(car } M \text{ est symplectique)} \\
&= M^2J_nMX = \frac{1}{\lambda}J_nMX \quad \text{(car } J_nMX \text{ est vecteur propre de } M^2 \text{ associé à la valeur propre } 1/\lambda) \\
&= \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX \\
\text{et} \quad m\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}MJ_nMX = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}M^TJ_nMX = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}(-J_nX),
\end{aligned}$$

donc la matrice de l'application m_F induite par m sur F dans la base obtenue est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{-\lambda} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda}J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_1 \end{pmatrix}.$$

33. Soit A une matrice antisymétrique et G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ stable par A.
Alors, pour tout $Y \in G^\perp$, pour tout $X \in G$,

$$\langle AY, X\rangle = (AY)^T X = Y^T A^T X = -Y^T AX = -\langle Y, AX\rangle = 0 \quad (\text{car } Y \in G^\perp \text{ et } AX \in G),$$

donc $AY \in G^\perp$, donc $G^\perp$ est stable par A.
Par suite, comme M est antisymétrique et F est stable par M, $F^\perp$ est aussi stable par M.
De même, comme J_n est antisymétrique et F est stable par J_n, $F^\perp$ est aussi stable par J_n.

34. **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a M symplectique et antisymétrique, donc $M = \pm J_1$, et alors $F_1 = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ convient et m_{F_1} aura pour matrice $\pm J_1$ dans la base canonique (e_1, e_2), et, quitte à considérer la base $(e_1, -e_2)$, on aura une base de F_1 dans laquelle la matrice de m_{F_1} sera J_1.
On a bien la proposition au rang 1.
Hérédité : Soit $n \geq 2$ et supposons la proposition vérifiée pour tout $k \leq n-1$.
Alors en dimension $2n$,
— Si M^2 a une valeur propre différente de -1, alors, en prenant X_1 un vecteur propre unitaire de M^2 associé à une valeur propre $\lambda \neq -1$, on peut former $F_1 = \mathrm{Vect}(X_1, MX_1, J_nX_1, J_nMX_1)$, espace vectoriel de dimension 4, qui sera stable par M et J_n, ainsi que $F_1^\perp$.
Si $F_1 = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on a fini.
Sinon, $m_{F_1^\perp}$ sera antisymétrique et symplectique, et $\dim(F_1^\perp) = 2n - \dim(F_1) = 2(n-2)$, donc, par récurrence, on construit une famille $(F_2, \dots, F_q)$ vérifiant les hypothèses.
De plus, pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $F_j \subset F_1^\perp$, donc, pour tout $Y \in F_j$, pour tout $X \in F_1$,

$$\langle X, Y\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(X, Y) = \langle X, J_nY\rangle = 0$$

(car F_j est stable par J_n, donc $J_nY \in F_j \subset F_1^\perp$), et d'après la question 32, il existera une base de F_1 dans laquelle la matrice de m_{F_1} sera de la forme voulue.
— Sinon, M^2 a une unique valeur propre, -1, donc, comme M^2 est diagonalisable (car symétrique), on a $M^2 = -I_{2n}$.
Soit alors X un vecteur propre unitaire de M^2 associé à la valeur propre -1.
• Soit $J_nX \in \mathrm{Vect}(X, MX)$. On pose alors $F_1 = \mathrm{Vect}(X, MX)$ et, dans la base $(X, -MX)$, m_{F_1} aura pour matrice J_1.
On applique ensuite HR_{n-1} à $m_{F_1^\perp}$.
• Soit $J_nX \notin \mathrm{Vect}(X, MX)$. Alors la famille (X, MX, J_nX) est libre.
On montre alors que la famille (X, MX, J_nX, J_nMX) est libre, car, si $aX + bMX + cJ_nX + dJ_nMX = 0 \quad (1)$, alors, en multipliant par J_n, on a $aJ_nX + bJ_nMX - cX - dMX = 0 \quad (2)$, donc, en faisant $b(1) - d(2)$, on obtient $(ab - cd)X + (b^2 + d^2)MX + (bc - ad)J_nX = 0$, donc, comme la famille (X, MX, J_nX) est libre, on a $b^2 + d^2 = 0$, donc $b = d = 0$, puis, grâce à (1), on a $a = c = 0$.
On construit alors comme dans la question 32 une base de $F_1 = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$ dans laquelle m_{F_1} aura la deuxième forme acceptée, et on applique ensuite HR_{n-2} à $m_{F_1^\perp}$.
On a donc bien la propriété au rang n.
Conclusion : On conclut alors par récurrence.
Vous aurez remarqué que la rédaction de cette réponse laisse à désirer mais il est ici difficile de prouver tout sans s'endormir ni se perdre dans les notations !

V.B - Mise en application

B est antisymétrique et, en écrivant $B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -5J_1 & -3J_1 \\ -3J_1 & -5J_1 \end{pmatrix}$, on vérifie que l'on a :

$$B^T J_2 B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5J_1 & 3J_1 \\ 3J_1 & 5J_1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3J_1 & -5J_1 \\ 5J_1 & 3J_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0_{2,2} & -16J_1^2 \\ 16J_1^2 & 0_{2,2} \end{pmatrix} = J_2$$

car $J_1^2 = -I_2$, donc B est symplectique.

35. $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B^2 associé à la valeur propre -4.

36. En prenant $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, X est un vecteur propre unitaire de B^2 associé à la valeur propre -4, donc, en prenant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\left(X, -\dfrac{1}{2}BX, -J_2X, \dfrac{1}{2}J_nBX\right)$, P sera orthogonale et symplectique

(d'après la remarque faite à la fin de la question 24), et, d'après les propriétés des matrices de changement de base et d'après la question 32, on aura

$$P^T BP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$