Première partie

1a. $S_n(\mathbb{R})$ est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto M - {}^tM$ de $M_n(\mathbb{R})$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j égal à 1. Les matrices $(E_{i,i})_{1\le i\le n}$ et $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\le i<j\le n}$ forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On montre que cette famille est libre.
On a donc $\dim(S_n(\mathbb{R})) = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
Toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable par le théorème spectral donc l'application $s^{\downarrow}$ est bien définie.

1b. Si $n=1$ l'application $s^{\downarrow}$ est l'application $[a] \mapsto a$ (de $M_1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) clairement linéaire et si $n>1$ elle ne l'est pas comme on le voit en calculant $s^{\downarrow}(-E_{1,1})$ qui vaut $(0,\cdots,0,-1) \in \mathbb{R}^n$ et est donc différent de $-(s^{\downarrow}(E_{1,1})) = (-1,0,\cdots,0)$.

1c. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $s^{\downarrow}(M) = (m_1,\dots,m_n)$, les valeurs propres de $-M$ sont $-m_1,\dots,-m_n$ donc en les réordonnant, $s^{\downarrow}(-M) = (-m_n,\dots,-m_1)$.

1d. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\chi_M(x) = (x-\lambda)(x-\mu) - h^2 = x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda\mu - h^2$.
Le discriminant est donc $\Delta = (\lambda-\mu)^2 + 4h^2 \geqslant 0$ et

$$s^{\downarrow}(M) = \Big(\frac{\lambda+\mu+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{\lambda+\mu-\sqrt{\Delta}}{2}\Big).$$

2a. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et $m = s^{\downarrow}(M)$ son spectre ordonné.
On sait qu'il existe une base **orthonormée** de vecteurs propres de M, $(v_1,\dots,v_n)$ associés aux valeurs propres $m_1,\dots,m_n$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i\right) v_k = \sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i v_k = \sum_{i=1}^n m_i v_i \langle v_i, v_k\rangle.$$

Comme la base $(v_1,\dots,v_n)$ est orthonormée :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i\right) v_k = m_k v_k \langle v_k, v_k\rangle = m_k v_k = M v_k.$$

Les deux applications linéaires $x \mapsto Mx$ et $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i\right) x$ coïncident sur une base. Elles sont égales et ont même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par suite :

$$M = \sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i.$$

2b. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On le décompose sur la base $(v_1,\dots,v_n)$: $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.
On a alors $Mx = \sum_{i=1}^n x_i m_i v_i$ et, comme on est dans une base orthonormée, $\langle x, Mx\rangle = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$.
Comme $m_1 \ge \cdots \ge m_n$, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \langle x, Mx\rangle \le \sum_{i=1}^n m_1 x_i^2 = m_1 ||x||^2$$

En particulier $\forall x\in\mathbb{R}^n, ||x|| = 1$, on a $\langle x, Mx\rangle \le m_1$.
En prenant $x = v_1$ qui est de norme 1, on a alors $\langle v_1, Mv_1\rangle = m_1$. Par suite :

$$\sup_{||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_1$$

2c. Soit j un entier avec $1\le j\le n$.
Comme dans la question précédente, pour $x = \sum_{i=1}^j x_i v_i$ vecteur quelconque de de norme 1 de $\mathcal{V}_j$:

$$\langle x, Mx\rangle = \sum_{i=1}^j m_i x_i^2 \ge m_j \left(\sum_{i=1}^j x_j^2\right) = m_j ||x||^2 = m_j$$

En prenant $x = v_j$, vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}_j$: $\langle x, Mx\rangle = m_j$.

On a donc : $\inf\limits_{x\in\mathcal{V}_j, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j$.

De même avec $\mathcal{W}_j$, en majorant les quantités étudiées :

$$\sup_{x\in\mathcal{W}_j, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j$$

3a. On a :

$$\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) = \dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{V} - \dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) > n - \dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) \geqslant 0.$$

(En effet, $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$).

Par conséquent :

$$\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) > 0.$$

3b. D'après la question précédente $(j + (n - j + 1) > n)$, $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}_j$ contient au moins un vecteur non nul. Comme c'est un sev, il contient au moins un vecteur x_0 de norme 1. Par définition, comme $x_0 \in \mathcal{V}$ et est de norme 1 : $\inf\limits_{x\in\mathcal{V}, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \leq \langle x_0, Mx_0\rangle$.

Mais $x_0 \in \mathcal{W}_j$ et est de norme 1, donc : $\langle x_0, Mx_0\rangle \leq \sup\limits_{x\in\mathcal{W}_j, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j$.

En réunissant les deux inégalités on a bien :

$$\inf_{x\in\mathcal{V}, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \leq m_j.$$

(Remarque : on montre comme en 2.b que si $\|x\| = 1$ alors $\langle x, Mx\rangle \geqslant m_n$, donc la borne inférieure dont il est question existe bien.)

3c. L'ensemble $\left\{\inf\limits_{x\in\mathcal{V}} \langle x, Mx\rangle \mid \mathcal{V} \text{ sev de } \mathbb{R}^n, \dim\mathcal{V} = j\right\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par m_j. Elle admet donc une borne supérieure qui est inférieure ou égale à m_j. On a égalité puisque m_j appartient à cet ensemble (la borne supérieure est atteinte). Donc :

$$\sup_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n, \dim\mathcal{V}=j} \ \inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx\rangle = m_j$$

4a. $M - L$ est encore une matrice réelle symétrique d'ordre n.

D'après la question précédente, pour $j = n$:

$$\sup_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n, \dim\mathcal{V}=n} \ \inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, (M-L)x\rangle \geqslant 0$$

$\mathbb{R}^n$ étant le seul sous-espace de E de dimension n, on a donc :$\forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \langle x, Mx\rangle \geqslant \langle x, Lx\rangle$.

Mais on a alors, pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de E de dimension j :

$$\inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx\rangle \geqslant \inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Lx\rangle$$

Et en prenant la borne supérieure sur tous les sous-espaces vectoriels de dimension j, on obtient : $m_j \geqslant \ell_j$ et $s^{\downarrow}(M) = (m_1, \cdots, m_n)$ et $s^{\downarrow}(L) = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$ d'où :

$$s^{\downarrow}(L) \leqslant s^{\downarrow}(M).$$

4b. La matrice $N = \|M\| I_n - M$ est symétrique puisque I_n et M le sont, et $sp(N) = \left\{\|M\| - \lambda | \lambda \in \mathrm{sp}(M)\right\} \subset \mathbb{R}_+$. En effet, pour tout vecteur propre X de module 1 associé à une valeur propre λ : $\|MX\| = |\lambda| \leqslant \|M\|$.

4c. On applique la propriété précédente aux matrices symétriques $M - L$ et $L - M$. On a

$$(0, \cdots, 0) \preccurlyeq s^{\downarrow}(\|M - L\| I_n - (M - L))$$

Donc $s^{\downarrow} M \preccurlyeq s^{\downarrow}(\|M - L\| I_n + L))$. Or $s^{\downarrow}(\|M - L\| I_n + L) = (\ell_1 + \|M - L\|, \cdots, \ell_n + \|M - L\|)$

On a donc :

$$\forall j \in [|1, n|],\ m_j \leqslant \|M - L\| + \ell_j.$$

De façon symétrique :

$$\forall j \in [|1, n|],\ \ell_j \leqslant \|L - M\| + m_j.$$

D'où les inégalités demandées puisque $\|L - M\| = \|M - L\|$.

4d. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \|_\infty$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$.
On a par la question précédente, pour tout $L \in S_n(\mathbb{R})$, $\|s^\downarrow(L) - s^\downarrow(M)\|_\infty \leq \|L - M\|$.
Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \varepsilon$, si $\|L - M\| \leq \eta$ alors $\|s^\downarrow(L) - s^\downarrow(M)\|_\infty \leq \varepsilon$.
Ainsi, l'application $s^\downarrow$ est continue en M. Elle est donc continue sur $S_n(\mathbb{R})$.

5a. Si $n = 1$, tout réel $r > 0$ convient. Sinon, on prend $r = \dfrac{\min\limits_{i \in [|1, n-1|]} (m_i - m_{i+1})}{2}$ où $s^\downarrow(M) = (m_1, \cdots, m_n)$.
Si $L \in B_o(M, r)$, alors pour tout $i \in [|1, n-1|]$:

$$\ell_i > m_i - \frac{r}{2} \geqslant m_{i+1} + \frac{r}{2} > \ell_{i+1}$$

donc $L \in S_n^\dagger(\mathbb{R})$. (On a noté : $s^\downarrow(L) = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$).
Tout élément de $S_n^\dagger(\mathbb{R})$ est donc intérieur à $S_n^\dagger(\mathbb{R})$, et donc $S_n^\dagger(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

5b. D'après la question 1d, les deux valeurs propres d'une matrice réelle symétrique ne sont égales que si elle est de la forme λI_2, $(\lambda \in \mathbb{R})$. Donc $S_2^\dagger(\mathbb{R}) = S_2(\mathbb{R}) \setminus \text{vect}(I_2)$. On retrouve ainsi que $S_2^\dagger(\mathbb{R})$ est ouvert (puisque $\text{vect}(I_2)$ est fermé comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie). Lorsque l'on identifie (en tant qu'espace vectoriel) $S_2(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^3$, l'application $s_1^\downarrow$ est l'application $(\lambda, \mu, h) \mapsto \frac{\lambda+\mu+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}$
Les projections sont de classe C^1 et l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition et théorèmes usuels sur les opérations, $s_1^\downarrow$ est donc de classe C^1 sur $S_2^\dagger(\mathbb{R})$. Par contre, en $(\lambda, \lambda, 0)$, la troisième application partielle est $h \mapsto \lambda + |h|$ qui n'est pas dérivable en 0 : $s_1^\downarrow$ n'est donc pas de classe C^1 sur $S_2(\mathbb{R})$.

Deuxième Partie

6a. Ceci est simplement l'égalité : $\text{tr}(C) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

6b. On a : $c_1 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, Cx \rangle$. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1,\ \langle x, Cx \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leqslant a_1 + b_1$$

D'où par passage à la borne supérieure :

$$c_1 \leqslant a_1 + b_1.$$

6c. On utilise la propriété précédente avec $-A = (-B) + (-C)$, ce qui donne $-c_n \leqslant -a_n - b_n$, puis :

$$c_n \geqslant a_n + b_n.$$

7a. On a alors

$$\dim(\mathscr{U} + \mathscr{V}) + \dim(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}) + \dim(\mathscr{W}) > 2n,$$

soit encore :

$$\dim(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}) + \dim(\mathscr{W}) > 2n - \dim(\mathscr{U} + \mathscr{V}) > n.$$

Donc, d'après la question 3.a :

$$\mathscr{U} \cap \mathscr{V} \cap \mathscr{W} \neq \{0\}.$$

7b. Appelons $\mathscr{W}_j, \mathscr{W}'_j$ les espaces associés à A et B comme dans la question 2.C, et $\mathscr{V}''_j$ le sous-espace associé à C analogue à l'espace $\mathscr{V}_|$. On a

$$\dim(\mathscr{V}''_{j+k-1}) + \dim(\mathscr{W}_j) + \dim(\mathscr{W}'_k) = j + k - 1 + n - j + 1 + n - k + 1 = 2n + 1 > 2n.$$

Donc $\mathscr{V}''_{j+k-1} \cap \mathscr{W}_j \cap \mathscr{W}'_k \neq \{0\}$ Soit x un vecteur de norme 1 appartenant à cette intersection. On a alors

$$\langle x, Cx \rangle \geqslant c_{j+k-1}$$

et

$$\langle x, Cx \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leqslant a_j + b_k.$$

On obtient donc :

$$c_{j+k-1} \leqslant a_j + b_k.$$

En considérant alors les décompositions spectrales de $-A, -B, -C$, on obtient, pour tout couple d'indices (j, k) tels que $j + k \leqslant n + 1$:

$$-c_{n+2-j-k} \leqslant -a_{n+1-j} - b_{n+1-k}.$$

Donc :

$$c_{n+2-j-k} \geqslant a_{n+1-j} + b_{n+1-k}.$$

En posant $j' = n+1-j$, j' parcourt toutes les valeurs de $[|1,n|]$ et, avec $k=1$:

$$c_{j'} \geqslant a_{j'} + b_n.$$

On obtient la relation demandée par retour à l'indice initial.

8a. Si $e_1 = {}^t(1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n$, alors $\langle e_1, Ae_1\rangle = a_{1,1} \leqslant a_1$ puisque $\|e_1\| = 1$.

8b.

$$\sum_{i=1}^{j} s_i - f(t_1,\cdots,t_k) = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - \sum_{i=j+1}^{k} s_j t_j$$

Or

$$\sum_{i=j+1}^{k} s_j t_j \leqslant s_j \sum_{i=j+1}^{k} t_j = s_j(j - \sum_{i=1}^{j} t_j).$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{j} s_i - f(t_1,\cdots,t_k) = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - js_j + \sum_{i=1}^{j} s_j t_j) = \sum_{i=1}^{j}(s_i - s_j)(1-t_i).$$

Les termes du 2° membre sont positifs donc :

$$\forall (t_1,\cdots,t_k) \in \mathcal{D}_{j,k},\ f(t_1,\cdots,t_k) \leqslant \sum_{i=1}^{j} s_i$$

Ce majorant est atteint pour $t_1 = \cdots t_j = 1$ et $t_{j+1} = \cdots = t_k = 0$. Donc :

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^{j} s_j.$$

8c. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On peut décomposer e_i dans la base orthonormée de vecteurs propres attachés à A, $(v_1,\ldots,v_n)$.

On a $e_i = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle v_k$ et $Ae_i = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle a_k v_k$.

On a ainsi $a_{ii} = \langle e_i, Ae_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2 a_k$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{j} a_{ii} = \sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2 a_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} \langle e_i, v_k\rangle^2\right) a_k$$

Notons, pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, $t_k = \sum_{i=1}^{j} \langle e_i, v_k\rangle^2 \geq 0$. On a $\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2 = ||v_k||^2 = 1$ donc $t_k \leq 1$.

(En effet, comme la base $(e_1,\ldots,e_n)$ est orthonormée, pour tout k, $v_k = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle e_i$).

De plus $\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \langle e_i, v_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2\right) = \sum_{i=1}^{j} ||e_i||^2 = \sum_{i=1}^{j} 1 = j$.

On est donc exactement dans les hypothèses de la question **8b** et, pour tout entier $1 \leq j \leq n$, $\sum_{i=1}^{j} a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \leq \sum_{i=1}^{j} a_i$.

8d. Au lieu de partir de la base canonique, on pourrait partir de n'importe que base orthonormale. Or, toute famille orthonormale $(x_1,\cdots,x_j) \in \mathcal{R}_j$ peut être complétée en une base orthonormée. On a donc, pour une telle famille orthonormale de j éléments $(x_1,\cdots,x_j)$:

$$\sum_{i=1}^{j} \langle x_i, Ax_i\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{j} a_j.$$

De plus, si $(v_1,\cdots,v_n)$ est une base orthonormée correspondant à une résolution spectrale de A, alors on a $\forall i\in[|1,n|]$, $\langle v_i, Av_i\rangle = a_i$. Donc
$$\sum_{i=1}^{j}\langle v_i, Av_i\rangle = \sum_{i=1}^{j} a_i$$
On a donc bien :
$$\sum_{i=1}^{j} a_i = \sup_{(x_1,\cdots,x_j)\in\mathfrak{R}_j}\sum_{i=1}^{j}\langle x_i, Ax_i\rangle$$

8e. Pour toute famille $(x_1,\cdots,x_j)\in\mathfrak{R}_j$:
$$\sum_{i=1}^{j}\langle x_i, Cx_i\rangle = \sum_{i=1}^{j}\langle x_i, Ax_i\rangle + \sum_{i=1}^{j}\langle x_i, Bx_i\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{j} b_i.$$
En passant à la borne supérieure, on obtient alors :
$$\sum_{i=1}^{j} c_i \leqslant \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{j} b_i.$$

Troisième partie

9. Si A et B sont diagonales $A+B$ est diagonale et ses valeurs propres sont de la forme a_i+b_j, $(i,j)\in[|1,2|]^2)$. Donc $s^{\downarrow}$ peut prendre les valeurs $M_1=(a_1+b_1,a_2+b_2$ ou $M_2(a_1+b_2,a_2+b_1)$ (puisque $a_1+b_2\geqslant a_2+b_1$). Ce segment a pour longueur $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{2(b_2-b_1)^2} = \sqrt{2}(b_1-b_2)$.

Si $(c_1,c_2)=s^{\downarrow}(A+B)$, alors $c_1+c_2=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}B = a_1+b_1+a_2+b_2$. De plus , après la deuxième partie :
$$a_1+b_2\leqslant c_1\leqslant a_1+b_1$$
Donc, si $b_1=b_2$, alors $c_1=a_1+b_1$ et $c_2=a_2+b_1$: Σ est un singleton, c'est à dire un segment de longueur nulle.
Si $b_1>b_2$, c_1 est comprise entre les abscisses des points M_1 et M_2, donc $N(c_1,c_2)\in[M_1,M_2]$.

10a. Dans le cas général, A est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$ et l'on peut écrire : $A=PDP^{-1}$. Si l'on pose $B'=P^{-1}BP$, on a alors : $B=PB'P^{-1}$ et $s^{\downarrow}(B')=(b_1,b_2)$. On a alors $s^{\downarrow}(A+B)=s^{\downarrow}(D+B')$. Réciproquement P peut prendre comme valeur n'importe quelle matrice orthogonale d'ordre 2. On a donc :
$$\Sigma=\left\{s^{\downarrow}(A+B)|A=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}, B\in S(b_1,b_2)\right\}.$$

10.b Quitte à changer un vecteur d'une base de diagonalisation en son opposé, on peut supposer que les matrices de passage appartiennent à $SO(2)$: il existe $\theta\in[-\pi,\pi]$ tel que $P=r(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$. L'application $\theta\mapsto r(\theta)$ est continue puisque ses fonctions coordonnées sont continues, ainsi que l'application $\theta\mapsto r(-\theta)$. Si $D\in M_2(\mathbb{R})$ les applications $\begin{cases}M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})\\ M\mapsto MD\end{cases}$ et $\begin{cases}M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})\\ M\mapsto DM\end{cases}$ sont linéaires donc continues (on est en dimension finie). Par composition l'application $\begin{cases}[-\pi,\pi]\to M_2(\mathbb{R})\\ \theta\mapsto r(\theta)\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix}r(-\theta)\end{cases}$ est continue et son image est $S(b_1,b_2)$.

10.c D'après ce qui précède l'application $u:\begin{cases}[-\pi,\pi]\to M_2(\mathbb{R})\\ \theta\mapsto\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}+r(\theta)\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix}r(-\theta)\end{cases}$ est continue.

Or l'application $s^{\downarrow}$ est continue sur $S_2(\mathbb{R})$, donc par composition l'application $v=s^{\downarrow}\circ u$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ et son image est Σ. De plus, on a $v(0)=s^{\downarrow}\left(\begin{pmatrix}a_1+b_1 & 0\\ 0 & a_2+b_2\end{pmatrix}\right)=(a_1+b_1,a_2+b_2)=M_1$ et $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=s^{\downarrow}\left(\begin{pmatrix}a_1+b_2 & 0\\ 0 & a_2+b_1\end{pmatrix}\right)=(a_1+b_2,a_2+b_1)$. La première composante $s_1^{\downarrow}$ de $s^{\downarrow}$ est encore continue. Donc $s_1^{\downarrow}\circ u$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ et prend donc en particulier toute valeur entre a_1+b_1 et a_1+b_2. Donc $L\subset\Sigma$ donc $L=\Sigma$