
DM11 (PROBABILITÉS)
À rendre le lundi 10 mars

Sujet 1 - type CCINP

Ce sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice 1 : Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.

On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

Q1. Déterminer la loi de X_1 .

Q2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .

Q3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4. Pour tout $k \in \llbracket b, n+b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$.

Q5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}.$$

Q6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii) \ell = k-1, \quad (iii) \ell = k.$$

Q10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k).$$

Q11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Exercice 2 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0.

Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.

Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

12. Que représente la variable aléatoire S_n ?
13. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .
14. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$.

15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
16. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .
17. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Dédurre de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

18. Montrer que $R_p \geq 1$.
19. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

20. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

21. Calculer q_1 et q_2 .

22. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

23. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

24. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

25. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

26. En utilisant les questions **Q22** et **Q24**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$.
Interpréter le résultat.

Sujet 2 - Type Mines

Nombre de sites visités par une marche aléatoire

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d -uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire de pas X , à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne revient jamais en 0_d , au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $E(N_n)$ de la variable aléatoire N_n .

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et D.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Si α est un élément de $]0, 1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Si α est un élément de $]1, +\infty[$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler, sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$.

Justifier la formule :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) x^n.$$

5. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

Montrer que G est définie et continue sur $[-1, 1]$ et que

$$G(1) = \mathbb{P}(R \neq +\infty).$$

6. Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que

$$S_n - S_k \sim S_{n-k} \quad (c'est\text{-}\grave{a}\text{-}dire\ que\ S_n - S_k\ et\ S_{n-k}\ ont\ m\^eme\ loi)$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(R = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

7. Montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad F(x) = 1 + F(x)G(x).$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1^- , en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(R \neq +\infty)$.

8. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

L' l ment A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in] -1, 1[$ tel que

$$\forall x \in]1 - \alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A.$$

9. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.

10. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l' v nement

$$(S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\}).$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(R > i).$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(R > i).$$

11. Conclure que

$$\frac{E(N_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R = +\infty).$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Ces ro : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergant vers le nombre réel ℓ , alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.

Par ailleurs, p est un élément de $]0, 1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = -1) = q.$$

12. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$

13. Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $G(x)$.

Exprimer $\mathbb{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.

Déterminer la loi de R .

14. On suppose que

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra admettre et utiliser le théorème de sommation des relations de comparaisons :

On suppose que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites de réels positifs vérifiant $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

(a) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(b) Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n v_k$.

D. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdős et Dvoretzky

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0_d) \mathbb{P}(R > n - k).$$

16. Dans cette question, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (0, 1)) = \mathbb{P}(X = (0, -1)) = \mathbb{P}(X = (1, 0)) = \mathbb{P}(X = (-1, 0)) = \frac{1}{4}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2.$$

et donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2)$.

Sujet tronqué : on peut alors montrer que $E(N_n) \sim \frac{n}{\pi \ln(n)}$.