TD magic constant.

Il y avait une imprécision dans l'énoncé.

Soit x un flottant non nul, on l'écrit de manière unique :

$$x = (-1)^s . m 2^e .$$

m est de la forme $m = 1 + \sum_{k=1}^{23} d_k 2^{-k} = 1 + m'$

avec $m' = \sum_{k=1}^{23} d_k 2^{-k}$

__Question 10 :__ Exprimer M'_x en fonction de m'_x et de L.

M'_x est un entier dont $d_1 d_2 \dots d_{22} d_{23}$ serait la représentation binaire.

Par définition : $M_x = d_1 2^{22} + d_2 2^{21} + \dots + d_{22} 2^1 + d_{23} 2^0$

$$= \underbrace{2^{23}}_{L} \Big(\underbrace{d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + \dots + d_{22} 2^{-22} + d_{23} 2^{-23}}_{m'_x} \Big)$$

$$= L m'_x$$

$$M'_x = L m'_x$$

__Question 11 :__ Reprenons la représentation des flottants :

S	E'	M
1 bit	8 bits	23 bits
$s = 0$	$e'_8 \dots e'_1$	$d_{23} \dots d_1$

Par définition :

$$I_x = s2^{31} + e'_1 2^{30} + \dots + e'_8 2^{23} + \underbrace{d_1 2^{22} + \dots + d_{23} 2^0}_{M'_x}$$

$$= 0 + \underbrace{2^{23}}_{L} (\underbrace{e'_1 2^7 + \dots + e'_8 2^0}) + M'_x .$$

On reconnait l'écriture binaire de E'_x

On a donc

$$\boxed{I_x = L E'_x + M'_x}$$

Question 12

On a $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2(y) = -\frac{1}{2} \log_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2((1+m'_y) 2^{e_y}) = -\frac{1}{2} \log_2((1+m'_x) 2^{e_x})$$

$$\Leftrightarrow \quad e_y + \log_2(1+m'_y) = -\frac{1}{2}(e_x + \log_2(1+m'_x))$$

Utilisons l'approximation donnée dans l'énoncé $(0 < m' < 1)$

On obtient :

$$m'_y + \sigma + e_y = -\frac{1}{2} m'_x - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} e_x$$

Or $e = E - B$

Ainsi :

$$m'_y + \sigma + E_y - B = -\frac{1}{2} m'_x - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2} E_x + \frac{1}{2} B$$

En multipliant par L, on a :

$$M'_y + \sigma L + E_y L - BL = -\frac{1}{2}(M'_x + E_x L) + \frac{1}{2} BL - \frac{1}{2}\sigma$$

Soit : $\boxed{I_y = \frac{3}{2}(B-\sigma)L - \frac{1}{2} I_x}$

On a bien $I_y = K - \frac{1}{2} I_x$

avec $\boxed{K = \frac{3}{2}(B-\sigma)L}$

Question 13 Numériquement on obtient : $\boxed{K = 1\,597\,463\,008}$

Question 14 $\boxed{(5f3759df)_{16} = 1\,597\,463\,007}$

Question 15 La ligne 4 calcule une première approximation de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en utilisant la relation :

$$\begin{cases} I_y = K - \frac{1}{2} \times I_x \\ i = 0x5f3759df - i >> 1 \end{cases}$$

Question 16

La fonction mystère calcule $\frac{1}{\sqrt{x}}$ où x est l'argument de la fonction.

Les lignes 3 à 5 servent à calculer une première approximation qui servira de point de départ pour la méthode de Newton écrite à la ligne 6.

Question 17

En double précision, il faut prendre $L = 2^{53}$ car 53 bits codent m'.

Question 18

Il est possible d'appliquer cette méthode au calcul de $y = x^{\alpha}$

On devra alors calculer :

$$I_y = (1-\alpha)(B-\sigma)L + \underbrace{a I_x}$$

ici on ne pourra plus utiliser l'astucieuse division euclidienne