# Corrigé du DS 6 sujet 1

## Exercice 1

**Q1.** On considère la série entière $\sum p_n t^n$ et on note $R$ son rayon de convergence.
La série $\sum p_n$ converge car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
Donc $\sum p_n t^n$ converge pour $t=1$, donc $R \geqslant 1$.
Notons $D_{G_X}$ l'ensemble de définition de $G_X$.
On a donc :$]-1,1[\subset D_{G_X}$

Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Prouvons que $\forall t \in ]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

**1.** En utlisant le produit de Cauchy de deux séries entières :

Notons $R_1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_1 = n)t^n$.
Notons $R_2$ le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_2 = n)t^n$.

Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n t^n$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.

On a, d'après le cours, $R \geqslant \min(R_1, R_2)$ et : $\forall t \in ]-R,R[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n$$

Or, on a vu dans la question 1. que $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$.
Donc, $R \geqslant 1$.
Donc, par produit de Cauchy pour les séries entières, $\forall t \in ]-1,1[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n. \ (*)$$

De plus, pour tout entier naturel $n$,
$(S = n) = (X_1 + X_2 = n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}((X_1 = k)\cap(X_2 = n-k))$ (union d'événements deux à deux incompatibles).
Donc : $P(S = n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(S = n)t^n$.
C'est-à-dire, $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_S(t)$.

**2.** En utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice :

Soit $t \in ]-1,1[$.
D'après 1., $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ admettent une espérance.
De plus, $G_{X_1}(t) = E[t^{X_1}]$ et $G_{X_2}(t) = E[t^{X_2}]$.
$X_1$ et $X_2$ sont indépendantes donc $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ sont indépendantes.
Donc $t^{X_1}t^{X_2} = t^S$ admet une espérance et $E[t^S] = E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]$.
C'est-à-dire, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

**Q2.** Soit $S_n$ variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
On note $X_i$ la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.
$X_i(\Omega) = \{0,1,2\}$.
De plus, $P(X_i = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X_i = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(X_i = 2) = \frac{1}{4}$.
Donc, $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{X_i}(t) = E[t^{X_i}] = t^0 P(X_i = 0) + t^1 P(X_i = 1) + t^2 P(X_i = 2)$.

Donc, $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{X_i}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}(t+1)^2$.
On a : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

De plus, les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes.
D'après 2., on en déduit que : $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)....G_{X_n}(t)$.
C'est-à-dire, $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$.

Ou encore, $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{1}{4^n}t^k$.

Or, $\forall t \in ]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k)t^k$.

Donc, par unicité du développement en série entière :
$S(\Omega) = [\![0,2n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,2n]\!]$, $P(S_n = k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{4^n} = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$
Donc, $S_n$ suit une loi binomiale de paramètre $(2n, \frac{1}{2})$.

# Problème

## Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

**Q3.** D'après le formule des probabilités totales pour le système complet d'événements (SCE) associé à la variable aléatoire $X_0$ :

$$\begin{aligned} p(X_1=1) &= P(X_0=1)\times P_{(X_0=1)}(X_1=1)+P(X_0=2)\times P_{(X_0=2)}(X_1=1)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} p(X_1=2) &= P(X_0=1)\times P_{(X_0=1)}(X_1=2)+P(X_0=2)\times P_{(X_0=2)}(X_1=2)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la loi de } X_1 \text{ est donnée par } X_1(\Omega)=\{1,2\} \text{ et}\\ P(X_1=1)=\frac{3}{8}, P(X_1=2)=\frac{5}{8}.\end{array}}$$

**Q4.** D'après le formule des probabilités totales pour le système complet d'événements (SCE) associé à la variable aléatoire $X_n$ :

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1}=1)\\ &=P(X_n=1)\times P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)\times P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\\ &=\frac{1}{2}\times P(X_n=1)+\frac{1}{4}\times P(X_n=2)\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1}=2)\\ &=P(X_n=1)\times P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)+P(X_n=2)\times P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)\\ &=\frac{1}{2}\times P(X_n=1)+\frac{3}{4}\times P(X_n=2)\end{aligned}$$

Donc, avec $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned}\mu_n A &= \left(\mathrm{P}(X_n=1)\times\tfrac{1}{2}+\mathrm{P}(X_n=2)\times\tfrac{1}{4} \quad \mathrm{P}(X_n=1)\times\tfrac{1}{2}+\mathrm{P}(X_n=2)\times\tfrac{3}{4}\right)\\ &= \left(P(X_{n+1}=1)\quad P(X_{n+1}=2)\right)\\ &= \mu_{n+1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \mu_{n+1}=\mu_n A.}$$

**Q5.** Donc :

$$\mu_5=\mu_4 A=\mu_3 A^2=\cdots=\mu_0 A^5$$

La calculatrice permet donne les résultats suivants arrondis au centième : $P(X_5=1)\simeq 0,33$ et $P(X_5=2)\simeq 0,67$.

**Q6.**

$$(T=1)=(X_0\neq 1)\cap(X_1=1)=(X_0=2)\cap(X_1=1)$$

donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}(T=1)=P(X_0=2)\times P_{(X_0=2)}(X_1=1)$$

donc

$$\boxed{P(T=1)=\tfrac{1}{8}.}$$

et pour tout $k\geqslant 2$ :

$$(T=k)=\left(\bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i=2)\right)\cap(X_k=1)$$

donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}&P(T=k)\\ &=P(X_0=2)\times\left(\prod_{i=1}^{k-1}P_{(X_0=2)\cap\cdots\cap(X_{i-1}=2)}(X_i=2)\right)\\ &\qquad\times P_{(X_0=2)\cap\cdots\cap(X_{k-1}=2)}(X_k=1)\\ &=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall k\geqslant 2, P(T=k)=\tfrac{1}{8}\times\left(\tfrac{3}{4}\right)^{k-1}.}$$

**Q7.** $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}x-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & x-\frac{3}{4}\end{vmatrix}=(x-1)(x-\frac{1}{4})$$

Donc $\chi_A=(X-1)(X-\frac{1}{4})$ est simplement scindé, donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

De plus, la résolution des systèmes $AX = X$ et $AX = \frac{1}{4}X$ donne la matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ inversible et à coefficients entiers telle que

$$A = Q\text{diag}(1, \frac{1}{4})Q^{-1}.$$

**Q8.** L'application $M \mapsto QMQ^{-1}$ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M \mapsto \mu_0 M$ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. Donc :

$$\boxed{\text{les applications } M \mapsto QMQ^{-1} \text{ et } M \mapsto \mu_0 M \text{ définies sur } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ sont continues.}}$$

**Q9.** On peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = Q\text{diag}(1, \frac{1}{4})^n Q^{-1}$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{diag}(1, \frac{1}{4})^n = \text{diag}(1, (\frac{1}{4})^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{diag}(1, 0)$ par caractérisation de la limite de la suite de matrices par la limite de ses coefficients qui sont les coordonnées dans la base canonique.

De plus, d'après la question précédente, $M \mapsto QMQ^{-1}$ est continue, donc

$$\begin{aligned} A^n &= Q\text{diag}(1, \frac{1}{4})^n Q^{-1} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} Q\text{diag}(1,0)Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 \times A^n$ (par récurrence) ; donc par continuité de $M \mapsto \mu_0 M$ :

$$\mu_n = \mu_0 \times A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_0 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la suite de matrices } (A^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{la suite de vecteurs lignes } (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{convergent avec } \lim_{n\to+\infty} \mu_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.\end{array}}$$

## Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

**Q10.** Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, donc $x \neq 0_{n,1}$ et, comme $A$ est stochastique :

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{1,i}1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_{p,i}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x$$

Donc

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$$

**Q11.** Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^p$, on note $y = (y_1, \dots, y_p) = Ax$, donc pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ :

$$\begin{aligned} |y_i| &= \left|\sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^p |a_{i,j}x_j| \\ &= \sum_{j=1}^p a_{i,j}\,|x_j| && (\text{car } a_{i,j} \geqslant 0) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^p a_{i,j}\,\|x\|_\infty \\ &= \|x\|_\infty && (\text{car } \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty.}$$

**Q12.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $x$ un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$. Donc, d'après la question précédente :

$$\|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$$

et

$$\|Ax\|_\infty = |\lambda|\,\|x\|_\infty$$

donc : $|\lambda|\,\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$ ; de plus $x$ est un vecteur propre, donc non nul, donc $\|x\|_\infty > 0$.
Donc : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{si } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est une valeur propre de } A, \text{ on a } |\lambda| \leqslant 1.}$$

### Localisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$.

**Q13.** $\lambda$ est une valeur propre de $A$, soit $y$ un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$ ; donc $Ay = \lambda y$ et $y \neq 0_n$, donc $\|y\|_\infty > 0$. On pose $x = \frac{y}{\|y\|_\infty}$, donc $\|x\| = 1$ et $Ax = x$.

Donc :

$$\boxed{\text{il existe un vecteur colonne } x = (x_1, \dots, x_p) \text{ de } \mathbb{C}^p \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1 \text{ et } Ax = \lambda x.}$$

**Q14.** $Ax = \lambda x$, donc en considérant le $i^{\text{ième}}$ coefficient de ce vecteur :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

donc :

$$\sum_{j \in [\![1\,;p]\!] \setminus \{i\}} a_{i,j} x_j = (\lambda - a_{i,i}) x_i$$

et

$$\begin{aligned}
|\lambda - a_{i,i}| &= |(\lambda - a_{i,i} x_i| \\
&= \sum_{j \in [\![1\,;p]\!] \setminus \{i\}} a_{i,j} x_j \\
&\leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j} x_j| \\
&\leqslant \sum_{j \neq i} a_{i,j} && (\text{car } |x_j| \leqslant \|x\|_\infty = 1 \text{ et } a_{i,j} \geqslant 0) \\
&= 1 - a_{i,i} && (\text{car } \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}.}$$

### Étude d'un exemple

**Q15.** D'après la question précédente, si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors il existe $i \in [\![1\,;3]\!]$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}$. Donc :

$$\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } \left|\lambda - \frac{1}{6}\right| \leqslant \frac{5}{6} \text{ ou } \left|\lambda - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{2}{3}$$

Donc : $\lambda$ appartient à la réunion des cercles $C_1$ de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, $C_2$ de centre $\frac{1}{6}$ et de rayon $\frac{5}{6}$ et $C_3$ de centre $\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

Donc :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.}}$$

On constate en particulier sur l'exemple que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1.

On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique strictement positive.

*une démonstration de ce résultat :*

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = 1$, d'après **Q14**, il existe $i \in [\![1\,;p]\!]$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}$$

Donc : $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant |\lambda| - |a_{i,i}|$
or d'après la seconde inégalité triangulaire : $|\lambda - a_{i,i}| \geqslant |\lambda| - |a_{i,i}|$. Donc : $|\lambda - a_{i,i}| = |\lambda| - |a_{i,i}|$ et

$$|\lambda - a_{i,i}| + |a_{i,i}| \leqslant |\lambda|\,.$$

Donc, d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\lambda - a_{i,i} = \alpha a_{i,i}$, donc : $\lambda = (1 + \alpha) a_{i,i} \in \mathbb{R}^+$ or $|\lambda| = 1$ ; donc $\lambda = 1$.

On a montré que si $\lambda$ est une valeur propre complexe de $A$ de module 1, alors $\lambda = 1$. Or, d'après la question **Q10**, 1 est valeur propre de $A$ ; 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1.

### Cas des matrices stochastiques strictement positives

**Q16.** On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice $A$ est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note $B'$ la matrice de $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de $B$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $B'$.
On admet qu'il existe un entier $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similiaire à celle de la question **Q14**.

*une démonstration :*

Soit $y$ un vecteur propre de $B'$ associé à la valeur propre $\lambda$ ; on pose $x = \frac{y}{\|y\|_\infty}$, donc $x$ est un vecteur propre de $B'$ associé à $\lambda$ et $\|x\|_\infty = 1$. Soit $i \in [\![1\,;p-1]\!]$ tel que $|x_i| = \|x\|_\infty = 1$, comme $B'x = \lambda x$, en considérant le $i^{\text{ième}}$ coefficient :

$$\sum_{j=1}^{p-1} b_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Donc :

$$(\lambda - b_{i,i})x_i = \sum_{j\in[\![1\,;p-1]\!]\smallsetminus\{i\}} b_{i,j}x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|(\lambda - b_{i,i})x_i| &= \left|\sum_{j\in[\![1\,;p-1]\!]\smallsetminus\{i\}} b_{i,j}x_i\right| \\
&= \left|\sum_{j\in[\![1\,;p-1]\!]\smallsetminus\{i\}} a_{i,j}x_i\right| \quad (\text{si } i \neq j, \text{ alors } b_{i,j} = a_{i,j}) \\
&\leqslant \sum_{j\in[\![1\,;p-1]\!]\smallsetminus\{i\}} a_{i,j}\,|x_i| \\
&\leqslant \sum_{j\in[\![1\,;p-1]\!]\smallsetminus\{i\}} a_{i,j} \quad (\text{car } |x_j| \leqslant \|x\| = 1) \\
&= 1 - a_{i,i} - a_{i,p} \quad (\text{car } \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1)
\end{aligned}$$

et

$$|(\lambda - b_{i,i})x_i| = |\lambda - b_{i,i}| = |\lambda - (a_{i,i} - 1)|$$

D'où l'inégalité voulue.

Montrons que $B'$ est inversible par l'absurde : on suppose que $B'$ n'est pas inversible ; donc 0 est une valeur propre de $B'$, donc d'après ce qui précède, il existe $i \in [\![1\,;p-1]\!]$ tel que :

$$|0 - (a_{i,i} - 1)| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$$

donc : $1 - a_{i,i} \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$ ;
donc : $a_{i,p} \leqslant 0$ ; or $A$ est supposée strictement positive, donc $a_{i,p} > 0$, d'où la contradiction.

Donc :

$$\boxed{B' \text{ est inversible.}}$$

**Q17.** On sait que $B'$ est inversible, donc ses colonnes forment une famille libre de $\mathbb{R}^{p-1}$, donc les $p-1$ premières colonnes de $B$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^p$, donc :

$$\operatorname{rg} B \geqslant p - 1.$$

Donc, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker} B) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_p)) \leqslant 1.$$

De plus, on sait que 1 est valeur propre de $A$, donc $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_p)) \geqslant 1$. Donc :

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(A - I_p)) = 1.}$$

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de $A$. On dit alors que 1 est une valeur propre simple de $A$. Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la Proposition 1 ci-dessous.

Proposition 1. Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive. Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1.

*une démonstration* :
Soit $\alpha$ l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de $A$. Montrons que $\alpha = 1$ par l'absurde : on suppose $\alpha \geqslant 2$. On note $F_1 = \operatorname{Ker}\left((A - I_p)^\alpha\right)$ le sous-espace caractéristique de $A$ associé à la valeur propre 1, donc $\dim F_1 = \alpha$. D'après le cours, on sait que $F_1$ est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à $B$ (avec $B = A - I_p$), on note $b \in \mathcal{L}(F_1)$ l'endomrphisme induit sur $F_1$. Donc $b$ est nilpotent d'indice inférieur à $\alpha$ ; on note $\beta$ cet indice de nilpotence. Or $\dim(F_1) = \alpha > 1$ et $E_1$, l'espace propre de $A$ associé à 1 est de dimension 1, donc $F_1 \neq E_1$, donc $b \neq 0$ (il existe dans $F_1$ des vecteurs qui ne sont pas dans $E_1$). Donc $\beta \geqslant 2$. Soit $y \in F_1$ tel que $b^{\beta-1}(y) \neq 0$.

Les matrices $B$ et $I_p$ commutent et $A = I_p + B$, donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$$

Donc :

$$A^n y = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j y = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j(y) = \sum_{j=0}^{\beta-1} \binom{n}{j} b^j(y)$$

Donc, d'après la seconde intégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\|A^n y\| &\geqslant \binom{n}{\beta-1} \left\|b^j(y)\right\| - \left\|\sum_{j=0}^{\beta-2} \binom{n}{j} b^j(y)\right\| \\
&\geqslant \binom{n}{\beta-1} \left\|b^j(y)\right\| - \sum_{j=0}^{\beta-2} \binom{n}{j} \left\|b^j(y)\right\|
\end{aligned}$$

Or : $\forall j \in [\![1\,;\beta]\!], \binom{n}{j} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^j}{j!}$ (cf **Q21**) ;
donc $\left(\left\|b^{\beta-1}(y) \neq 0\right\|\right)$ :

$$\sum_{j=0}^{\beta-2} \binom{n}{j} \left\|b^j(y)\right\| \underset{n\to+\infty}{=} \binom{n}{\beta-1} \left\|b^j(y)\right\|$$

Donc :

$$\|A^n y\| \underset{n\to+\infty}{\sim} \binom{n}{\beta-1} \left\|b^j(y)\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Or, d'après **Q11**, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\| \leqslant \|x\|$, donc par récurrenc, $(\|A^n y\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\|y\|$ ; d'où la contradiction. Conclusion : 1 est une valeur propre de $A$ d'ordre 1.

## Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :
Proposition 2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

### Un contre-exemple

**Q18.** On considère $s$ la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. La matrice $B$ de $s$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q19.**

$$B^2 = I_2$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$B^{2n} = (B^2)^n = I_2 \text{ et } B^{2n+1} = B^{2n}B = B.$$

Donc la suite extraite $(B^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $I_2$ et la suite extraite $(B^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \neq I_2$. Donc la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Donc :

| La Proposition 2 n'est pas vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive. |
|---|

### Résultat préliminaire

Soit $\lambda$ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et $N$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

**Q20.** *il s'agit d'une question de cours.*

La matrice $N$ est nilpotente, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$, donc $X^k$ est un polynôme annulateur de $N$. Le polynôme minimal de $N$ divise donc $X^k$ ; il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_N = X^m$. De plus $\chi_N$ est annulateur de $N$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, donc $\mu_N$ divise $\chi_N$, donc $m = \deg(\mu_N) \leqslant \deg \chi_N = p$. Donc $N^m = 0_p$ et $N^p = N^m \times N^{p-m} = 0_p$.

$$\boxed{N^p = 0.}$$

**Q21.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant k$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!}$$

Or pour tout $j \in \mathbb{N}, n - j \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc (opération sur les équivalents : nombre de terme fixé dans le produit)

$$\boxed{\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}}$$

Or $|\lambda| < 1$, donc d'après le théorème des croissances comparées,

$$\left|n^k \lambda^n\right| = n^k |\lambda|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc :

$$\boxed{\binom{n}{k}\lambda^{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

**Q22.** Les matrices $I_p$ et $N$ commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant p$ :

$$\begin{aligned}(\lambda I_p + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} \lambda^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{p} \lambda^{n-k} N^k \qquad (\forall k \geqslant p, N^k = 0)\end{aligned}$$

or : $\forall k \in [\![0\,;p-1]\!], \binom{n}{p}\lambda^{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par combinaison linéaire de limites (le nombre de termes $p$ est fixé) :

| la suite de matrices $((\lambda I_p + N)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. |
|---|

### Convergence d'une suite de matrices

Soit $A$ une matrice stochastique et strictement positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On sait, d'après la Proposition 1, que 1 est valeur propre simple de $A$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de $A$, un théorème du cours montre que $A$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\operatorname{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)$$

avec $p_1, \ldots, p_r$ des entiers et $N_1, \ldots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

**Q23.** D'après le théorème de réduction par blocs rappelé, il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ tel que

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \mathrm{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} N_r)$.

Donc (on montre par récurrence que) pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $A^n = PD^nP^{-1}$. Or

$$D^n = \mathrm{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \ldots, (\lambda_r I_{p_r} N_r)^n)$$

et d'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1\,;r]\!], (\lambda_i I_{p_i} + N_i)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par caractérisation de la limite par les coordonnées dans la base canonique, les coefficients de $(\lambda_i I_{p_i} + N_i)^n$ tendent vers 0 et donc par la même caractérisation, $D^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{diag}(1, 0 \ldots, 0)$.

Donc par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ (d'après **Q8**) : $A^n = PD^nP^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (A^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

## Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. On dit que $A$ admet une probabilité invariante s'il existe un vecteur ligne stochastique $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu A = \mu$ (on dit alors que $\mu$ est une probabilité invariante par A).

Le but de cette partie est de démontrer la propriété énoncée dans la Proposition 3 ci-dessous.

Proposition 3. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. On note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^p$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n$ A. Alors, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur stochastique $\mu_\infty$ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$. De plus, le vecteur $\mu_\infty$ est l'unique probabilité invariante par $A$ (il ne dépend donc pas du choix de $\mu_0$ ).

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie ci-dessus.

**Q24.** On note $S$ l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^p$. Donc : $S = \left\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid \forall i \in [\![1\,;p]\!] x_i \geqslant 0 \text{ et } \sum\limits_{i=1}^p x_i = 1\right\}$.

Or : $\forall i \in [\![1\,;p]\!], f_i : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_i$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie donc $f_i$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ ; de plus $[0\,;+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc

$$f_i^{-1}([0\,;+\infty[) = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geqslant 0\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^p.$$

Et de même, $g : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum\limits_{i=1}^p x_p$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}^p$ de dimension finie, donc $g$ est continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc :

$$g^{-1}(\{1\}) = \left\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^p x_i = 1\right\} \text{est un fermé de } \mathbb{R}^p.$$

Donc : $S = \left(\bigcap\limits_{i=1}^p f_i^{-1}([0\,;+\infty[)\right) \cap g^{-1}(\{1\})$ est un fermé car intersection de fermés.

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs stochastiques de } \mathbb{R}^p \text{ est une partie fermée de } \mathbb{R}^p.}$$

### Convergence de la suite

**Q25.** Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 \times A^n$. Or $A$ est une matrice stochastique strictement positive, donc d'après la question **Q23**, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; notons $B$ sa limite.

Donc par continuité de l'application $M \mapsto \mu_0 M$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^p$ (d'après la question **Q8**) ;

$$\mu_n = \mu_0 A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_0 B.$$

Notons $\mu_\infty = \mu_0 B$.

La suite extraite $(\mu_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\mu_\infty$, de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n A$ et $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty$ ; de plus l'application $x \mapsto xA$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $\mathbb{R}^p$ de dimension finie ; donc l'application est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Donc : $\mu_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty A$. Et par unicité de la limite $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

*remarque : c'est le même résultat que pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ et $f$ continue en $\ell$, alors $f(\ell) = \ell$.*

$$\boxed{\text{la suite } (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur } \mu_\infty \text{ vérifiant } \mu_\infty = \mu_\infty A.}$$

**Q26.** Soit $\mu = (m_1, \ldots, m_p)$ un vecteur ligne stochastique. On pose $\mu' = (m'_1, \ldots, m'_p) = \mu A$. Donc, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ :

$$m'_i = \sum_{j=1}^p m_j a_{j,i} \geqslant 0$$

car $\forall j \in [\![1\,;p]\!], m_j \geqslant 0$ et $a_{j,i} \geqslant 0$.

Et

$$\sum_{i=1}^p m'_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p m_j a_{j,i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p} \left( m_j \sum_{i=1}^{p} a_{j,i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} m_j && \text{(car } A \text{ est stochastique)} \\
&= 1 && \text{(car } \mu \text{ est stochastique)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mu A \text{ est un vecteur stochastique.}}$$

**Q27.** On sait que $\mu_0$ est un vecteur stochastique, donc d'après la question précédente et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n$ est stochastique. Or $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty$ et l'ensemble des vecteurs stochastiques est un fermé de $\mathbb{R}^p$. Donc : $\mu_\infty$ est un vecteur stochastique par caractérisation séquentielle des fermés.

De plus $\mu_\infty = \mu_\infty A$, donc :

$$\boxed{\mu_\infty \text{ est une probabilité invariante par } A.}$$

### Unicité de la probabilité invariante

**Q28.** Lien avec le spectre de la transposée de $A$ : soit $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. Donc :

$$
\begin{aligned}
\mu \text{ est une probabilité invariante par } A &\Leftrightarrow \mu A = \mu \\
&\Leftrightarrow (\mu A)^\top = \mu^\top \\
&\Leftrightarrow A^\top \mu^\top = \mu^\top
\end{aligned}
$$

et $\mu \neq 0$ ; donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mu \text{ est une probabilité invariante pour } A, \text{ si et seulement si le vecteur} \\ \text{colonne } \mu^\top \text{ est un vecteur propre de } A^\top \text{ associé à la valeur propre 1.}\end{array}}$$

**Q29.** Soit $B = A - I_p$. Le rang de $B$ est égal au rang de la famille de ses lignes, qui est le rang de la famille de ses colonnes, qui est le rang de la famille des lignes de $B^\top$ qui est le rang de $B^\top$.

Donc $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}(B^\top)$ et d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker} B) = \dim(\operatorname{Ker}(B^\top))$. Or d'après la question **Q17**, $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_p)) = 1$ ; donc :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}\left(A^\top - I_p\right) = 1.}$$

**Q30.** On sait déjà que $A$ admet une probabilité invarante d'après la question **Q27**.

Soit $\mu_1, \mu_2$ des probabilités invariantes par $A$. Donc $\mu_1^\top$ et $\mu^\top 2$ sont des vecteurs propres de $A^\top$ pour la valeur propre 1 ; or $\dim(\operatorname{Ker}(A^\top - I_p)) = 1$ ; donc $\mu_1$ et $\mu_2$ sont colinéaires. De plus $\mu_1$ et $\mu_2$ sont non nulles, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_2 = \lambda \mu_2$ et la somme des coefficents de $\mu_1$ et de $\mu_2$ est 1. Donc : $1 = \lambda \times 1$. Donc $\mu_1 = \mu_2$.

$$\boxed{A \text{ admet une unique probabilité invariante.}}$$