

Correction du devoir à la maison n° 8

3 Réalisation d'un spectre à l'aide d'un réseau de diffraction**3.1 Diffraction par une fente**

11. Le phénomène est d'autant plus marqué que la largeur b de la fente est faible et que la longueur d'onde est grande.
12. D'après la question précédente, la longueur de la fente selon Oz étant beaucoup plus grande que b les effets de la diffraction dans cette direction seront négligeables par rapport à ceux selon Ox .
13. Il faut placer le détecteur dans la direction de l'optique géométrique, i.e. $\theta = i$.
14. La largeur de la tâche centrale est $\frac{2\lambda}{b}$, ce qui est bien sûr incompréhensible dans le cadre de l'optique géométrique (où elle serait nulle).

3.2 Utilisation d'un réseau par transmission

15. Calcul classique du cours $\delta = a(\sin i - \sin \theta)$, d'où $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin i - \sin \theta)$.
16. Les interférences interfèrent de manière constructive si $\varphi = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. On en déduit la formule des réseaux $\sin i - \sin \theta = \frac{p\lambda}{a}$.
17. On retrouve bien certains éléments connus du cours (fonction réseau) : présence de maxima principaux pour $\varphi = 2p\pi$, présence de $N - 1$ annulations entre deux maxima principaux successifs et de $N - 2$ maxima secondaires.

En revanche on trouve une caractéristique qui n'est pas prévue : la valeur des maxima principaux décroît au fur et à mesure qu'on s'écarte de l'ordre 0. Ceci est dû à la prise en compte de la largeur petite mais finie de chaque fente, ce que nous n'avons pas fait en cours (H.P.).

18. En différentiant la formule des réseaux avec $i = 0$, à p fixé, il vient $\cos \theta d\theta = \frac{p}{a}d\lambda$, d'où $D = \frac{|p|}{a \cos \theta}$ (pas besoin de valeur absolue pour le cos dans le domaine angulaire étudié).
19. La relation précédente montre que plus on travaille dans un ordre élevé plus le pouvoir dispersif est grand : en effet p augmente, et comme θ augmente aussi le dénominateur diminue, ce qui augmente D !
En revanche on risque de tomber d'une part sur un recouvrement des spectres et d'autre part d'avoir un spectre peu lumineux (décroissance des maxima avec l'ordre).
20. D'après la relation précédente il vient en confondant les petites variations avec les variations infinitésimales $\Delta\theta = \frac{|p|}{a \cos \theta} \Delta\lambda$.
21. En différentiant cette fois la relation $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin \theta$, il vient $d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}a \cos \theta d\theta$. On utilise cette relation avec $d\varphi = \delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ et $d\theta = \delta\theta$, ce qui donne directement la relation attendue.

22. Le critère de Rayleigh (H.P.) énonce qu'à la limite de résolution, la première annulation suivant un maximum d'intensité pour une longueur d'onde est confondu avec le maximum d'intensité pour l'autre longueur d'onde. Il se traduit tout simplement par $\Delta\theta = \delta\theta!$
23. D'après la question précédente il vient $\mathcal{P}_{\text{système}} = N |p|$.
24. Pour le réseau proposé on calcule $N = 26 \times 530 = 13780$ traits utilisés au maximum. On a alors $\mathcal{P} = 13780 |p|$. On voit qu'il faudrait travailler au moins à l'ordre de 3 pour atteindre le pouvoir de résolution du matériel embarqué dans ELODIE. On pourrait vérifier d'ailleurs que l'ordre 3 est l'ordre maximal pour lequel on peut travailler.

3.3 Le spectrographe de l'observatoire de Haute-Provence

25. Attention au piège du schéma qui propose un $\theta < 0 \dots$ La technique de calcul est la même que celle qu'on utilise habituellement.
Faisons une figure avec seulement les rayons incidents (angle i) (cf. figure 1).

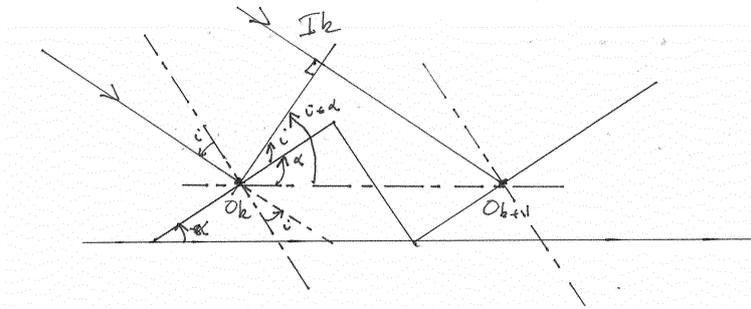


FIGURE 1 – Calcul de la différence de marche

Elle montre par l'utilisation du théorème de Malus que la contribution avant réflexion à la différence de chemin optique est $I_k O_{k+1}$, I_k étant le projeté de O_k sur l'autre rayon, i.e. $O_k I_k$ est la trace d'un plan d'onde perpendiculaire aux rayons incidents passant O_k . Elle montre aussi que l'angle entre $O_k I_k$ et la face sur laquelle le rayon se réfléchit est i . Dès lors l'angle entre $O_k O_{k+1}$ et $O_k I_k$ est $i + \alpha$ et le chemin optique $(I_k O_{k+1}) = a \sin(i + \alpha)$. En procédant de même pour les rayons réfléchis on trouve une différence de marche supplémentaire $a \sin(\theta + \alpha)$. On en déduit la relation demandée.

26. Le détecteur doit être placé dans une direction de l'optique géométrique comme auparavant c'est-à-dire $\theta = -i$.
27. En faisant $i = \theta = 0$, il reste $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a \sin \alpha$, d'où $p_0 = \frac{2a \sin \alpha}{\lambda}$.
On constate qu'il s'agit d'un ordre non nul, donc dispersif, ce qui n'était pas le cas pour le réseau étudié avant.
28. L'intérêt est d'avoir en même un phénomène lumineux (direction de l'optique géométrique) et un ordre dispersif (voire fortement dispersif si p_0 est élevé)!
29. Pour $\lambda = 390$ nm, $p_{0,\max} = 159,8$, et pour $\lambda = 690$ nm, $p_{0,\max} = 90$.
30. En supposant que la largeur utile du réseau est $\ell = 102$ mm, comme il comporte 31 traits par millimètre, on a $N = 3162$. En travaillant dans des ordres de l'ordre de 50 à 80 on obtient un pouvoir de résolution de l'ordre de 150 000 à 240 000, ce qui est beaucoup plus qu'annoncé par la documentation.
31. On peut par un dessin estimer $\tan \alpha$ à quelques unités (environ 4). Dès lors le pouvoir de résolution de la fibre est de l'ordre de $2 \times 1.10^4 \times 4 \times f' \simeq 8.10^4 \times f'$. Il est donc clair, sauf à avoir une très grande distance focale (irréaliste!), que ce pouvoir de résolution est relativement inférieur à celui du réseau. C'est donc la fibre qui limite le pouvoir de résolution du spectrographe.

4 Analyse du spectre d'absorption des étoiles

4.1 Effet doppler

32. Supposons que l'émetteur soit en O à $t = 0$ et qu'il émette un bip (qui modélise par exemple un maximum du signal émis). Ce premier bip est reçu à $t = 0$ par le récepteur. Le second bip sera émis à l'instant $t = T$, quand l'émetteur sera à l'abscisse $x_{em} = v_{em}T$ et arrivera en O après un temps supplémentaire de propagation de $\frac{x_{em}}{v_{onde}} = \frac{v_{em}T}{v_{onde}}$, soit à la date qui correspond à la période apparente $T_0 = T + \frac{v_{em}T}{v_{onde}} = T \left(1 + \frac{v_{em}}{v_{onde}}\right)$. On en déduit la fréquence apparente $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{f_{em}}{1 + \frac{v_{em}}{v_{onde}}} \simeq f_{em} \left(1 - \frac{v_{em}}{v_{onde}}\right)$ compte tenu de

$v_{onde} \gg v_{em}$. On en déduit facilement la relation attendue.

33. À partir des données on va estimer la vitesse au bas de la trajectoire car c'est là qu'elle sera la plus grande et en plus en direction du micro. On peut prendre par exemple les deux valeurs qui encadre le point le plus proche du micro, i.e. ceux aux dates $t = 0,067$ s et $t = 1,133$ s, entre lesquels le buzzer passe de $x = -8,37 \cdot 10^{-2}$ m à $x = 1,53 \cdot 10^{-1}$ m, soit une vitesse $v_{em} \simeq 3,5$ m/s. Dès lors le décalage maximal en fréquence est $\Delta f = f_{buzzer} \frac{v_{em}}{c_{son}} \simeq 40$ Hz en prenant $c_{son} \simeq 340$ m/s comme vitesse du son.

On peut détecter ce décalage en utilisant un multiplieur qui multiplie le signal reçu (de fréquence $f_{buzzer} + \Delta f$) et un signal de référence f_{buzzer} , ce qui donnera à un signal de fréquence Δf et un autre de fréquence $2f_{buzzer} + \Delta f$, qu'on pourra éliminer par un filtrage passe-bas.

34. On peut faire le lien avec la modification de la hauteur du son d'une sirène d'ambulance ou de camion de pompier que l'on croise sur la route par exemple.

4.2 Analyse du mouvement d'un système à deux corps

35. On établit d'abord facilement que $\vec{v} = \vec{v}_P - \vec{v}_E$, d'où $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_P}{dt} - \frac{d\vec{v}_E}{dt}$. Par ailleurs on applique le principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}_0 à la planète et à l'étoile, soit $m_P \frac{d\vec{v}_P}{dt} = -\frac{\mathcal{G}m_P m_E}{r^3} \vec{r}$ et $m_E \frac{d\vec{v}_E}{dt} = +\frac{\mathcal{G}m_P m_E}{r^3} \vec{r}$ (attention au changement de signe, cohérent avec le principe des actions réciproques...)

On en tire $\frac{d\vec{v}_P}{dt} = -\frac{\mathcal{G}m_E}{r^3} \vec{r}$ et $\frac{d\vec{v}_E}{dt} = \frac{\mathcal{G}m_P}{r^3} \vec{r}$, d'où $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}(m_E + m_P)}{r^3} \vec{r}$.

36. Le référentiel barycentrique est **LE** référentiel en translation par rapport à \mathcal{R}_0 , dans lequel G est fixe. Ici le système étant isolé, l'application de la loi de la quantité de mouvement dans \mathcal{R}_0 à ce système montre que G a un mouvement rectiligne uniforme. Dès lors le référentiel \mathcal{R}^* est galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen.

37. Par définition de ce qu'est le barycentre d'un système il vient $m_E \overrightarrow{GE} + m_P \overrightarrow{GP} = \vec{0}$, ce qui donne directement la relation attendue.

38. Introduisons le point M tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{EP} = \vec{r}$. Le référentiel barycentrique étant en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_0 , les dérivées vectorielles sont les mêmes

dans les deux référentiels ce qui permet d'écrire successivement $\left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}^*} = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{EP}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}^*} =$

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}^*} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}^*} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = -\frac{\mathcal{G}(m_E + m_P)}{r^3} \vec{r} \text{ d'après une question antérieure, soit}$$

$$\left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}^*} = -\frac{\mathcal{G}(m_E + m_P)}{r^3} \vec{r}.$$

Multiplions cette égalité à gauche et à droite par $\frac{m_P m_E}{m_P + m_E}$ (i.e. par μ), il vient $\mu \left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}^*} = -\frac{\mathcal{G} m_E m_P}{r^3} \overrightarrow{r}$, ce qui est l'équation du mouvement du point fictif M de masse μ soumis à la force $-\frac{\mathcal{G} m_E m_P}{r^3} \overrightarrow{r}$!

La position relative des points est donnée sur le schéma suivant (ils sont alignés dans l'ordre E, G, P, M avec $EP = GM$).

39. Dans \mathcal{R}^* le point fictif a donc un mouvement elliptique. Par ailleurs par définition du barycentre $\overrightarrow{GE} = -\frac{m_P}{m_P + m_E} \overrightarrow{EP} = -\frac{m_P}{m_P + m_E} \overrightarrow{r}$. Les mouvements de E et M sont homothétiques (avec un centre en G). Dès lors l'étoile a un mouvement elliptique dans le référentiel barycentrique. Il est est d'ailleurs de même pour la planète.
40. Si la planète a une trajectoire circulaire, compte tenu de l'homothétie évoquée dans la question précédente, l'étoile et le point fictif ont également des trajectoires circulaires, et les trois mouvements ont la même période. On peut calculer celle du point fictif. En effet l'équation de son mouvement s'écrit en fait $\mu \left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}^*} = -\frac{\mathcal{G} \mu (m_E + m_P)}{r^3} \overrightarrow{r}$, c'est-à-dire comme si l'objet de masse μ gravitait autour d'un corps de masse $m_E + m_P$. Là on a bien justifié que l'on peut appliquer la troisième loi de Képler sous la forme $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{m_E + m_P}}$, ce qui est la relation attendue.
41. Si $m_P \ll m_E$ on retrouve la troisième loi de Képler habituelle. C'est normal car alors on peut négliger le mouvement de l'étoile, confondre l'étoile et le barycentre et enfin le référentiel barycentrique et le référentiel d'étude (dans lequel l'étoile est fixe).

4.3 Détection de la première planète extrasolaire par la méthode des vitesses radiales

42. Pour répondre à cette question il faut sans doute faire l'hypothèse que G est fixe dans le référentiel \mathcal{R}_0 . Remarquons que $\overrightarrow{u}_T = -\cos i \overrightarrow{u}_x + \sin i \overrightarrow{u}_z$. Ensuite introduisons le vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_y$. Le mouvement de l'étoile a lieu dans le plan $(G, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{V})$. Introduisons également l'angle α entre \overrightarrow{r} et \overrightarrow{u}_y . Enfin noton $\omega = \frac{v_E^*}{r}$ (c'est la vitesse angulaire associée au mouvement de rotation de l'étoile). Dès lors vectoriellement on peut écrire $\overrightarrow{v}_E^* = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r} = \omega \overrightarrow{u}_T \wedge r (\cos \alpha \overrightarrow{u}_y + \sin \alpha \overrightarrow{V})$.
- On peut alors calculer $v_r = \overrightarrow{u}_x \cdot \overrightarrow{v}_E^*$. Le calcul sans difficulté amène $v_r = -v_E^* \sin(i) \cos \alpha$. L'angle α est nécessairement de la forme $\alpha = \omega t + \alpha_0$, α_0 étant la valeur de α à $t = 0$. Il suffit de poser $\alpha = \phi_0 + \pi$ pour obtenir la forme attendue.
43. Dans le spectre il y aura un décalage par effet Doppler. Le décalage maximal est lié à $V_0 = v_E^* \sin i$. Par ailleurs la pulsation d'oscillation est la vitesse angulaire de l'étoile.
44. Il faut déjà comprendre que la phase orbitale n'est pas un angle car la période est ici 1 ! C'est ici $\phi = \frac{\omega t + \phi_0}{2\pi}$. De plus le récepteur des ondes (le spectromètre ELODIE) est lui même en mouvement à cause de de la rotation de la Terre sur elle-même et du mouvement de la Terre autour du Soleil.
45. D'après le tableau l'excentricité est nulle et donc le mouvement est circulaire. On a donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_E^*}{v_E^*} = \frac{2\pi r_E^* \sin i}{V_0}$.

46. On fait l'hypothèse $m_P \ll m_E$. D'après la question 40 on a $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}(m_E + m_P)}} \simeq$

$2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}m_E}}$, on en tire $r = r_P = \sqrt[3]{\frac{T^2\mathcal{G}m_E}{4\pi^2}} = 7,79.10^9$ m (soit $7,8.10^6$ km ou encore $0,052$ u.a.).

La relation de la question précédente permet d'écrire $r_E^* \sin i = \frac{TV_0}{2\pi}$, or $r_E^* = \frac{m_p}{m_P + m_E} r \simeq \frac{m_P}{m_E} r$, soit $m_p \sin i = \frac{TV_0 m_E}{2\pi r} = 8,99.10^{26}$ kg.

47. Dans le pire des cas $\sin i \simeq 1$ et $\frac{m_P}{m_E} = 4,2.10^{-4} \ll 1$, donc l'hypothèse $m_P \ll m_E$ était justifiée.
48. Cette planète a une masse égale à seulement la moitié de celle de Jupiter et gravite autour d'une étoile dont la masse est quasiment la même que celle de notre Soleil. Cependant elle proportionnellement 100 fois plus proche (un peu comme mercure dans le système Solaire) et donc va être extrêmement chaude! C'est un Jupiter chaud!
49. Les barres d'erreur sont de l'ordre de 10 m/s, c'est donc l'ordre de grandeur la plus petite variation de vitesse radiale δv_r détectable.
50. La variation de vitesse radiale dû à l'effet de la Terre sur le Soleil d'après une relation précédente est au maximum de $\frac{m_T}{m_S} \frac{2\pi r}{T} = 9.10^{-2}$ m/s $\ll \delta v_r$. Dès lors par cette technique et avec ces appareils de mesure cette influence!
51. On peut clairement analyser le graphe comme étant a priori la somme d'au moins de deux signaux sinusoïdaux de période différentes. En supposant que la physique associée soit linéaire (cela suppose sans doute de négliger l'interaction entre les diverses planètes), on va associer à chaque composante une planète. Il y a donc au moins deux.

La période la plus courte est d'environ $T_1 = 0,7$ an (20 périodes en 14 ans), la plus longue de $T_2 = 12$ an (une demi-période en 6 ans).

Le rayon orbital r_1 se calcule comme précédemment $r_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2 \mathcal{G} m_E}{4\pi^2}} = 1,2.10^{11}$ m.

On estime pour cette planète l'amplitude variation à $V_{0,1} \simeq 50$ m/s, d'où $m_{P,1} \sin i = \frac{T_1 V_{0,1} m_E}{2\pi r_1} = 3,1.10^{27}$ kg. Là aussi l'hypothèse $m_P \ll m_E$ est validée (on l'a utilisée implicitement dans les calculs)

5 Étude cinétique de la formation de molécules prébiotiques

52. Il suffit de remplacer $[\text{CN}^-]$ par $\frac{[\text{HCN}]C^o}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ et $[\text{OH}^-]$ par $\frac{K_e c^{o2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ dans la relation $k_1[\text{CN}_{\text{total}}] = k_2[\text{HCN}][\text{OH}^-]$ pour obtenir la relation attendue...
53. On inverse la relation précédente dans laquelle on prend $k_1 = 2,47 \text{ j}^{-1}$, $K_e = 10^{-11,9}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1.10^{-10}$ mol/L, puis on fait l'application numérique pour obtenir $k_2 = 1,98.10^4 \text{ j}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L}$. Attention à l'unité!!
- On peut alors utiliser cette valeur dans l'expression de k_1 à cette température mais en prenant $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1.10^{-8}$ mol/L, ce qui donne $k_1(100C, pH = 8) = 1,25 \text{ j}^{-1}$. On peut aussi remarquer que $k_1(100C, pH = 8) = k_1(100C, pH = 10) \times \frac{10^{-8} + 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-8}}$.
54. La relation attendue est $k_1 \times t_{1/2} = \ln 2$. Il vient donc à $pH = 8$, $t_{1/2} = 0,55$ j.
55. On a classiquement $k_2(T_2) = k_2(T_1) \times \exp\left(-\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right) = 2,84 \text{ j}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L}$ en prenant $T_2 = 273$ K et $T_1 = 383$ K.
56. Toujours en utilisant les mêmes relations il vient $k_1(0C, pH = 10) = 1,77.10^{-5} \text{ j}^{-1}$, puis $t_{1/2} = 3,91.10^4$ j.

57. Il y a un petit travail d'interpolation, avec une échelle logarithmique à faire ici... Cf. schéma suivant qui montre que le point représentatif recherché est à mi chemin entre 1000 et 10000 ans, mais en échelle log, i.e. $10^{3,5} = 3,1.10^3$ an = $1,15.10^6$ j.
58. Si on trace une isotherme sur le graphe, c'est un segment horizontal qui coupe les courbes $t_{1/2} = Cte$ selon des valeurs décroissantes de $t_{1/2}$ quand on augmente le pH : autrement dit la cinétique est favorisée en milieu basique.
De même si on trace une iso-pH c'est un segment vertical qui coupe les courbes $t_{1/2} = Cte$ selon des valeurs de décroissantes de $t_{1/2}$ quand on augmente la température : autrement dit la cinétique est favorisée à haute température.
59. À température constante l'expression (10) montre que si on augmente le pH, $[HEO^+]$ diminue (et c'est le seul paramètre qui varie), i.e. k_1 augmente : la cinétique est bien favorisée.
60. Dans le préambule de cette partie on apprend que l'hydrolyse de HCN prédomine la polymérisation. Mais à $t = 0C$ les courbes du document 22 montrent que la réaction est très très lente ($t_{1/2} = 100$ ans à $pH = 10!!$) ce qui laisse la possibilité à la polymérisation d'avoir lieu.