

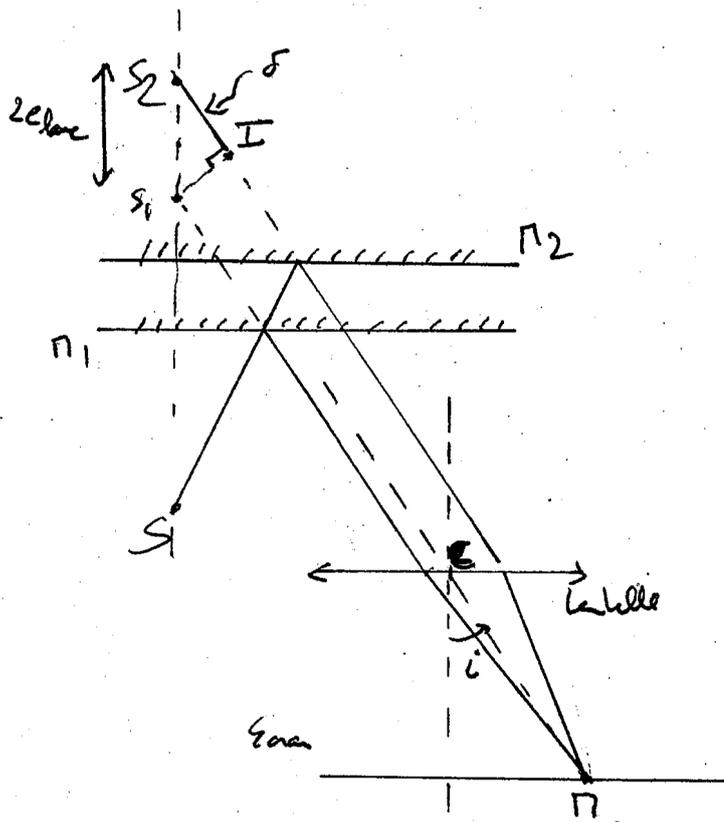
Corrigé du devoir surveillé n° 8

Problème I : CCP 2019 MP Physique 2. Partie IV et début de la partie V

IV Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

IV.1 Description de l'interféromètre de Michelson idéal

- Q28. On applique l'opération de repliement, qui revient à remplacer le miroir M_2 par son symétrique par rapport à la séparatrice, à remplacer la source étendue S par son symétrique par rapport à la séparatrice, et finalement à enlever la séparatrice. On obtient alors la figure suivante qui met en évidence la lame d'air d'épaisseur e_{lame} . Tout se passe comme si la source envoyait des rayons vers une lame à faces parallèles dont l'indice serait égal à celui de l'air, d'où la dénomination "lame d'air".



On construit les rayons à l'envers. Comme M est un foyer secondaire image, la direction CM est celle des rayons avant la lentille. On connaît donc l'angle d'incidence et de réflexion des rayons sur les deux miroirs. On finit la construction facilement.

- Q29. On introduit les images S_1 et S_2 de la source ponctuelle émettant des rayons qui interfèrent en M . Ces deux points sources secondaires sont distants de $2e_{\text{lame}}$. Par le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, on voit que la différence de chemin optique est localisée sur la longueur $S_2I = 2e_{\text{lame}} \cos i$, d'où la différence de marche attendue.

D'après le cours (formule de Fresnel des interférences à deux ondes dont il faut justifier la cohérence...), en considérant que les deux rayons qui interfèrent transportent la même intensité, il vient $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} 2e_{\text{lame}} \cos i \right) \right)$.

On observe sur l'écran des anneaux circulaires d'interférence, irrégulièrement répartis (plus serrés sur les bords qu'au centre), car le niveau d'éclairement ne dépend que de l'inclinaison i (il y a donc invariance par rotation de la figure d'interférence autour de l'axe optique de la lentille).

- Q30. On peut observer des brouillages car la source n'est pas parfaitement monochromatique. Dès lors si au point d'observation, la différence de marche est telle que les ordres d'interférence associés à deux fréquences distantes de $\Delta\nu/2$ est égal à $1/2$, l'éclairement sera localement uniforme (brouillage).

Il vient facilement **au centre** de la figure d'interférence $\Delta p = \frac{e_{\text{lame}} \Delta\nu}{c}$ (si on observe en un point repéré par l'angle i il vient $\Delta p = \frac{e_{\text{lame}} \cos i \Delta\nu}{c}$).

- Q31. La question n'est pas très bien posée car au contact optique on ne voit pas d'anneau... L'éclairement est uniforme, mais pas par brouillage, par interférences constructives partout...

La première valeur de e_{lame} qui amène un brouillage est celle pour laquelle $\Delta p = \frac{1}{2}$, soit $e_{\text{lim}} = \frac{c}{2\Delta\nu}$.

Calcul de l'intensité observée en F'

- Q32. Il suffit d'adapter la formule de Fresnel utilisée plus haut, en se plaçant au centre (puisque l'énoncé demande $dI(F')...$) :

$$dI(F') = 2I_{\nu m} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2e_{\text{lame}} \right) \right) d\nu =$$

$$2I_{\nu m} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{c} \nu \right) \right) d\nu = 2I_{\nu m} (1 + \cos (2\pi \tau(F') \nu)) d\nu.$$

$\tau(F')$ est la différence des temps de propagation des deux rayons qui interfèrent en F' .

On a enfin $p(F', \nu) = \tau(F') \nu$.

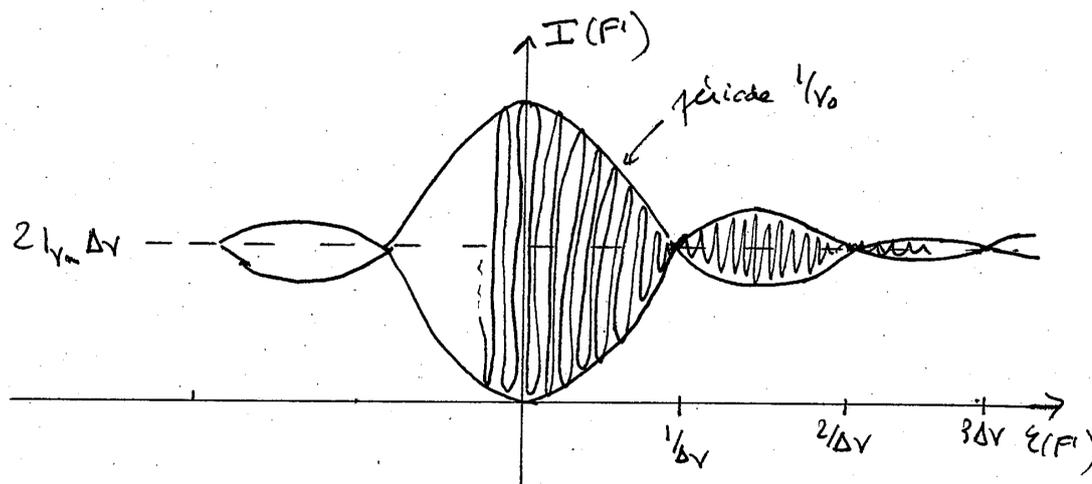
- Q33. Les différentes longueurs d'onde correspondent à des sources incohérentes, car non synchrones. Dès lors on somme les intensités individuelles.

$$\text{Il vient } I = I(F') = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} 2I_{\nu m} (1 + \cos (2\pi \tau(F') \nu)) d\nu.$$

Le calcul amène $I = 2I_{\nu m} \Delta\nu (1 + \text{sinc}(\pi \tau(F') \Delta\nu) \cos(2\pi \tau(F') \nu_0))$, en introduisant la fonction sinus cardinal.

On a donc par identification $\Gamma(\tau(F')) = \text{sinc}(\pi \tau(F') \Delta\nu)$. Il s'agit bien d'une fonction à "variation lente" car sa période d'annulation $1/\Delta\nu$ est très grande devant la période du terme habituel d'interférence à la fréquence ν_0 , à savoir $1/\nu_0$.

- Q34. L'allure demandée est donnée sur la figure suivante. La première annulation a lieu pour $\tau(F') = \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_0$. C'est précisément la durée d'un train d'onde!



Q35. Pour l'application numérique on a donc $\Delta\nu_{exp} = \frac{c}{2e} = 1,000 \cdot 10^{10}$ Hz. On a alors $\tau_0 = 0,1000$ ns.

V Largeur Doppler d'une raie d'émission

V.1 Décalage Doppler

Q36. L'instant t_1 recherché est tel que $ct_1 = d$ (qui traduit l'égalité de l'abscisse du maximum et du récepteur à l'instant t_1). Il vient donc $t_1 = \frac{d}{c}$.

Q37. Le deuxième maximum est bien sûr émis à l'instant T_0 . L'atome a avancé de $V_x T_0$, le récepteur est donc distant de l'émetteur de $d - V_x T_0$. La durée pour atteindre le récepteur est alors simplement $\frac{d - V_x T_0}{c}$, et l'instant $t_2 = T_0 + \frac{d - V_x T_0}{c} = \frac{d}{c} + T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right)$.

Q38. Dès lors l'écart entre ces deux instants de réception est $T = t_2 - t_1 = \frac{d}{c} + T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right) - \frac{d}{c} = T_0 \left(1 - \frac{V_x}{c}\right)$. Il vient donc $\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{V_x}{c}} \simeq \nu_0 \left(1 + \frac{V_x}{c}\right)$ (car $\frac{V_x}{c} \ll 1$), ce qui est

bien la relation attendue.

V.2 Distribution des vitesses dans un gaz parfait unidimensionnel

Données numériques

Q39. $m^* = \frac{M_{\text{Hg}}}{N_A} = 3,33 \cdot 10^{-25}$ kg.

Q40. Question admise

Q41. $\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2} = 1,5 \cdot 10^{-41}$ J.

Énergie moyenne d'un atome

Q42. $n_1 = \sqrt{\frac{k_B T_{\text{gaz}}}{\mathcal{E}_1}} = 3 \cdot 10^{10}$. Puis $\frac{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1} = \left(\frac{n_1 + 1}{n_1}\right)^2 - 1 \simeq 1 + \frac{2}{n_1} - 1 = \frac{2}{n_1}$ compte tenu de la valeur de n_1 . L'application numérique donne $7 \cdot 10^{-11}$. Cette variation relative de l'énergie entre deux niveaux successifs extrêmement faible montre que le spectre peut être considéré comme continu.

Q43. Il vient directement $n = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1}}$.

- Q44. Il découle de la relation précédente par différentiation $dn = \frac{d\mathcal{E}}{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}}}$.
- Q45. D'après la loi de Boltzmann (mais là il faut rester dans la modélisation discrète, sinon la question n'a pas de sens), la probabilité demandée est de la forme $A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$.
- Q46. $d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) dn = \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) d\mathcal{E}$.
- Q47. Cette relation est la traduction de la contrainte de normalisation : la probabilité qu'un atome soit dans un état d'énergie quelconque est nécessairement égale à 1. Dès lors $\int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{k_B T}{\mathcal{E}_1}} = 1$, d'où $A = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{\pi k_B T}}$ et donc $f(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi\mathcal{E}}} \exp(-\beta\mathcal{E})$.
- Q48. L'énergie moyenne se calcule par la formule de l'espérance $\langle\mathcal{E}\rangle = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} d\mathcal{P}(\mathcal{E})$. Le calcul amène $\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{1}{2\beta}$.
- C'est une application du théorème d'équipartition de l'énergie : chaque degré de liberté quadratique (ici il n'y a que la vitesse v_x) contribue à hauteur de $\frac{1}{2}k_B T$ à la valeur moyenne de l'énergie de chaque particule.
- Ici $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m^*v_x^2$, dès lors $\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{1}{2}m^*\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}m^*u^2 = \frac{1}{2\beta}$, d'où $u = \sqrt{\frac{1}{m^*\beta}} \simeq 2.10^2$ m/s.

Élargissement spectrale par effet Doppler

- Q49. D'après une partie précédente il vient facilement $\nu_+ = \nu\left(1 + \frac{u}{c}\right) = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 + \frac{u}{c}\right)$. De même $\nu_- = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 - \frac{u}{c}\right)$, ce qui donne $\Delta\nu_{DOP} = \frac{2u}{\lambda_0}$.
- Numériquement $\Delta\nu_{DOP} = 8.10^8$ Hz.
- En Q35 on avait trouvé 1.10^{10} Hz. L'élargissement Doppler n'est pas suffisant pour expliquer la valeur expérimentale. Il y a donc d'autres sources d'élargissement.

Problème II : ondes gravitationnelles. D'après Banque PT 2020 Physique A partie 2

A L'interféromètre de Michelson

- Le dispositif est dit configuré en lame d'air si les deux miroirs sont rigoureusement orthogonaux entre-eux. Avec une source étendue les interférences sont localisées à l'infini (en général dans le plan focal image d'une lentille convergente pour ramener la figure d'interférence à distance finie). Si on place l'écran ailleurs il y aura un brouillage de la figure d'interférence (perte de contraste par élargissement spatial de la source).
- La lame compensatrice est une lame à faces parallèles identique à la séparatrice sauf qu'elle n'a pas de traitement anti-reflet. Elle sert à compenser la différence de chemin optique qui existe entre les deux rayons lumineux qui vont se réfléchir sur les miroirs car ils ne traversent pas la séparatrice un même nombre de fois.
- Tracé classique.

En tenant compte du déphasage de π introduit par la séparatrice (et signalé par l'énoncé), on établit facilement comme en cours que $\delta = 2e \cos i + \frac{\lambda}{2}$.

Tous les points à la même distance de l'axe optique de la lentille sont caractérisés par un même angle d'incidence (frange d'égale inclinaison) et on donc même éclairement. Dès lors les franges sont invariantes par rotation autour de l'axe optique et forment des anneaux.

4. On commence par calculer l'ordre d'interférence au centre de la figure (pour $i = 0$) :
 $p_c = \frac{1}{2} + \frac{2e}{\lambda} = 10\,000,5$. Le centre de la figure est donc sombre. Le premier anneau brillant correspond à un ordre d'interférence $p_1 = 10\,000 = \frac{1}{2} + \frac{2e \cos i_1}{\lambda}$ car l'ordre d'interférence décroît du centre vers le bord.
 En supposant l'angle d'incidence i_1 associé faible on peut écrire, en notant r_1 le rayon recherché $\tan i_1 = \frac{r_1}{f'} \simeq i_1$, et $\cos i_1 \simeq 1 - \frac{i_1^2}{2} = 1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}$. Dès lors $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right)$,
 soit $r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda}{2e} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\right)} = 1,0 \text{ mm}$.

B Détection des ondes gravitationnelles

5. La lumière incidente a un éclairement E_0 . Après la traversée de la séparatrice l'éclairement vers un des miroirs est $E_0/2$. C'est le cas pour l'éclairement de l'onde se dirigeant à nouveau vers la séparatrice après réflexion sur le miroir. Après réflexion sur la séparatrice on perd encore la moitié de l'éclairement, donc il ne reste plus que $E_0/4$ (chacune des ondes porte séparément cet éclairement).
6. Il faut tenir compte des deux indices différents dans les deux directions. Dès lors il vient facilement la différence de marche $\delta = 2(n_y L_y - n_x L_x) + \frac{\lambda}{2}$ ce qui donne $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \pi + \frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x)$.
 L'énoncé ne le précise pas alors je considère que φ_x et φ_y sont des des retards de phase.
7. On peut écrire $s_x = s_0 \exp(-\varphi_x)$ et $s_y = s_0 \exp(-\varphi_y)$, avec $s_0 = \sqrt{\frac{E_0}{4}}$ d'après la question précédente.
 Par la formule des interférences à deux ondes de Fresnel il vient alors $E_y = \frac{E_0}{2} (1 + \cos(\varphi)) = \frac{E_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x)\right)\right)$.
8. La longueur d'onde associée à l'onde gravitationnelle est $\lambda = \frac{c}{f} = 300 \text{ km}$. La hauteur des miroirs D est très petite devant cette longueur d'onde. Dès lors on peut considérer les indices comme uniformes sur la direction Oz . On aura donc $\tau(z, t) \simeq \tau(t) = \tau_m \cos(2\pi f_0 t)$.
9. C'est une belle question de compréhension de ce qu'il se passe ici : on assiste à la déformation de la figure d'interférence de l'interféromètre de Michelson (pour la lumière visible de longueur λ) suite au passage de l'onde gravitationnelle qui modifie les indices optiques le long des deux bras. S'il n'y a pas cette onde gravitationnelle le calcul de la question 7 est valide car le temps de réponse est nettement plus grand que la période des ondes lumineuses. Ici il faut voir si l'on peut suivre les variations de cette figure d'interférence lors du passage de l'onde gravitationnelle. Celle-ci a une période de $T_0 = 1 \text{ ms}$, ce qui plus grand (d'un facteur 10) que le temps de réponse des récepteurs : sur le temps d'intégration des récepteurs l'éclairement varie peu (mais c'est vraiment limite) et donc on peut utiliser le résultat précédent.
10. Il suffit de substituer les expressions de $n_x = 1 - \tau(t)$ et $n_y = 1 + \tau(t)$ dans celle de E_y , puis dans le cosinus de regrouper les termes indépendants de τ d'une part et les autres factorisés par τ . On développe le cos puis on fait un développement au premier ordre en τ . On obtient la formule attendue en posant $\varphi_0 = \frac{4\pi}{\lambda} (L_y - L_x)$.
11. La variation de puissance est liée à la variation de $\tau(t)$ dans le terme où intervient $\sin \varphi_0$. Pour que cette variation se fasse sentir le plus possible il faut donc que $\sin \varphi_0 = \pm 1$, soit $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$.

12. Sans onde gravitationnelle on peut écrire $P = \alpha E_y = \alpha \frac{E_0}{2}$ en notant α une constante de proportionnalité, si on prend $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Au passage de l'onde on a alors une puissance maximale correspondant à $\tau = \tau_M$ et ainsi $P' = \alpha E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} (L_x + L_y) \tau_M \right) = P + \frac{4\pi}{\lambda} (L_x + L_y) \tau_M$. La variation maximale est donc $\Delta P = \frac{4\pi}{\lambda} (L_x + L_y) \tau_M$.

L'application numérique donne $\Delta P = 1,25$ nW. Pas énorme!! On imagine la difficulté pour détecter cette variation!!

C Seuil de détection

12. L'énergie \mathcal{E} déposée pendant la durée T peut s'exprimer de deux façons différentes :

$$\mathcal{E} = \langle P_y \rangle T = \frac{hc}{\lambda} \langle N \rangle, \text{ d'où } \langle N \rangle = \frac{\langle P_y \rangle T \lambda}{hc}.$$

13. $\langle P_y \rangle$ étant proportionnelle à $\langle N \rangle$, il vient facilement $\Delta P_y = \frac{hc}{\lambda T} \Delta N = \frac{hc}{\lambda T} \sqrt{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{hc}{\lambda T} \langle P_y \rangle}$ d'après la question précédente.

14. Il suffit d'écrire $\Delta P > \Delta P_y$, ce qui amène $\tau_M > \frac{1}{4\pi (L_x + L_y)} \sqrt{\frac{\lambda hc}{T \langle P_y \rangle}}$. J'ai un facteur 4 au lieu du facteur 2 de l'énoncé... Le terme de droite est la plus petite valeur de τ_M détectable.

L'application numérique donne $1,4 \cdot 10^{-19}$. Or τ_M est inférieur à cette valeur. L'onde gravitationnelle ne peut pas être détectée ainsi.

E Étude du dispositif complet

21. Il est clair que l'onde qui a subi une réflexion supplémentaire a parcouru en plus une distance $2\ell_x$ en plus dans un milieu d'indice n_x , soit une différence de marche de $2n_x \ell_x$, et un déphasage $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_x \ell_x$. Pas sûr que cette réponse soit exacte car il y a un déphasage de π à prendre en compte pour la réflexion sur le miroir, mais on ne sait pas ce qu'il en est pour la réflexion sur la lame semi-réfléchissante...

22. La condition imposée se traduit par $\frac{2\pi}{\lambda} 2n_x \ell_x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_x = 1$ en l'absence d'onde gravitationnelle, soit $2\ell_x = k\lambda$. La question 20 démontrait cette relation par une autre approche (étude d'une cavité, que nous n'avons pas traitée encore en cours).

23. Il suffit de transposer le résultat en remplaçant l'indice 1 par 2, et l'indice x par y , et en remplaçant τ par $-\tau$..., soit $\underline{S}'_y = -\underline{S}_2 \exp\left(-j \frac{4\pi F \tau(t) \ell_y}{\lambda}\right)$.