# DEVOIR MAISON 11 (Probabilités)

*Corrigé*

Sujet 1 - Exercice 1 : Les urnes de Polya *(CCINP PC 2021)*

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $X_1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1)$.
L'événement $(X_1 = 1)$ est l'événement « La boule tirée au premier tirage est blanche ».
Comme l'urne contient initialement $b$ boules blanches et $b + r$ boules au total, on obtient par équiprobabilité : $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X_1 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{b}{b+r}.}$$

Cela signifie que :

$$X_1(\Omega) = \{0, 1\},\ \ P(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r} \ \text{ et } \ P(X_1 = 0) = 1 - \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}.$$

2. On suppose que l'événement $(X_1 = 1)$ est réalisé c'est-à-dire que la boule tirée au premier tirage est de couleur blanche.
Avant le deuxième tirage, l'urne contient alors $b + 1$ boules blanches et $b + r + 1$ boules au total.
Au deuxième tirage, on peut alors tirer une boule blanche ou une boule rouge et par équiprobabilité, la probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\dfrac{b+1}{b+r+1}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la loi conditionnelle de } X_2 \text{ sachant l'événement } (X_1 = 1) \text{ est la loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{b+1}{b+r+1}.}$$

Cela signifie que :

$$X_2((X_1 = 1)) = \{0, 1\},\ \ P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{b+1}{b+r+1} \ \text{ et } \ P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = 1 - \frac{b+1}{b+r+1} = \frac{r}{b+r+1}.$$

Comme $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$, la variable aléatoire $X_2$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_2 = 1)$.
Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\big((X_1 = 0), (X_1 = 1)\big)$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0) \times P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) \\ &= \frac{r}{b+r} \times \frac{b}{b+r+1} + \frac{b}{b+r} \times \frac{b+1}{b+r+1} = \frac{b(r+b+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r}, \end{aligned}$$

la probabilité $P_{(X_1=0)}(X_2 = 1)$ étant obtenue par un raisonnement similaire à ce qui précède.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X_2 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{b}{b+r}.}$$

3. L'urne contient initialement $b$ boules blanches et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ représente le nombre de boules blanches tirées lors des $n$ premiers tirages ou encore le nombre de boules blanches ajoutées dans l'urne après $n$ tirages.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } S_n \text{ représente le nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du } n\text{-ième tirage.}}$$

Initialement, l'urne contient $b$ boules blanches. À chaque tirage, on peut obtenir une boule blanche ou une boule rouge donc au cours de $n$ tirages, on ajoute 0 boule blanche dans le cas extrême où l'on ne tire que des boules rouges, $n$ boules blanches dans le cas extrême où l'on ne tire que des boules blanches. Le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du tirage numéro $n$ est donc un entier compris entre $b$ et $n+b$.
Réciproquement, considérons un entier $k$ compris entre $b$ et $n+b$. L'entier $k$ peut donc s'écrire $k=b+i$ avec $i$ entier compris entre 0 et $n$.
Si l'on tire d'abord $i$ boules blanches puis $n-i$ boules rouges par exemple alors le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du tirage numéro $n$ est $b+i=k$.
On a donc montré par double-inclusion que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire } S_n \text{ est } S_n(\Omega) = [\![b, n+b]\!].}$$

4. Soit $k \in [\![b, n+b]\!]$. On suppose que l'événement $(S_n = k)$ est réalisé ce qui signifie qu'après les $n$ premiers tirages, l'urne contient $k$ boules blanches.
Avant le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient alors $k$ boules blanches et $b+r+n$ boules au total (puisqu'on ajoute une boule à chaque tirage donc $n$ boules après $n$ tirages).
Par équiprobabilité, on en déduit que :

$$\boxed{P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}.}$$

5. Remarquons que comme $S_n(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, $S_n$ est d'espérance finie.
Avec le système complet d'événements $\big((S_n = k)\big)_{k \in S_n(\Omega)} = \big((S_n = k)\big)_{k \in [\![b,n+b]\!]}$, on a par la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} P(S_n = k) \times P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} P(S_n = k) \times \frac{k}{b+r+n} = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k \in S_n(\Omega)} kP(S_n = k)$$

d'où :

$$\boxed{P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}.}$$

6. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
*Initialisation :* D'après la question 1, $X_1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
*Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ donc en particulier, $X_k$ est d'espérance finie et $E(X_k) = \dfrac{b}{b+r}$.
On a $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$ et par la question précédente $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{b+r+n}$.
Or, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

On en déduit que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{b(b+r+n)}{(b+r)(b+r+n)} = \frac{b}{b+r}.$$

Ainsi, $X_{n+1}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
On a donc prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{b}{b+r}.}$$

7. L'événement $(S_n = 1)$ est l'événement « L'urne contient une boule blanche après $n$ tirages ».
Il se réalise donc si et seulement si les $n$ premiers tirages donnent des boules rouges.
Ainsi :

$$\boxed{(S_n = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0).}$$

8. On a $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$. On suppose désormais $n \geqslant 2$.
D'après la formule des probabilités composées, on a alors :

$$P(S_n = 1) = P(X_1 = 0) \prod_{k=1}^{n-1} P_{(X_1=0)\cap\ldots\cap(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k}.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si l'on a tiré que des boules rouges aux $k$ premiers tirages alors on a ajouté $k$ boules rouges dans l'urne donc avant le $(k+1)$-ème tirage, l'urne contient $1+k$ boules rouges et $2+k$ boules au total.
Par télescopage, on en déduit que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2+(n-1)} = \dfrac{1}{n+1}$.

$$\boxed{P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}.}$$

9. On suppose que l'événement $(S_n = \ell)$ est réalisé, ce qui signifie qu'avant le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient $\ell$ boules blanches.
Avant le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient par ailleurs $2+n$ boules au total (car on a ajouté une boule à chaque tirage).
On tire soit une boule blanche, soit une boule rouge au $(n+1)$-ème tirage donc après le $(n+1)$-ème tirage, l'urne ne peut contenir que $\ell+1$ ou $\ell$ boules blanches.
Ainsi, si $k \neq \ell+1$ et $k \neq \ell$ (ou de façon équivalente si $\ell \neq k-1$ et $\ell \neq k$) alors $P(S_{n+1} = k \,|\, S_n = \ell) = 0$.
Après le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient $\ell+1$ boules blanches si et seulement si on tire une boule blanche au $(n+1)$-ème tirage donc par équiprobabilité, on a :

$$P(S_{n+1} = \ell+1 \,|\, S_n = \ell) = \frac{\ell}{2+n}.$$

En d'autres termes, si $k = \ell+1$ (ou de façon équivalente si $\ell = k-1$) alors $P(S_{n+1} = k \,|\, S_n = \ell) = \dfrac{k-1}{2+n}$.
Après le $(n+1)$-ème tirage, l'urne contient $\ell$ boules blanches si et seulement si on tire une boule rouge au $(n+1)$-ème tirage donc par équiprobabilité, on a :

$$P(S_{n+1} = \ell \,|\, S_n = \ell) = \frac{2+n-\ell}{2+n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}(i)\ P(S_{n+1} = k \,|\, S_n = \ell) = 0 \text{ si } \ell \notin \{k-1, k\}\ ,\quad (ii)\ P(S_{n+1} = k \,|\, S_n = \ell) = \dfrac{k-1}{2+n} \text{ si } \ell = k-1 \\ \text{et } (iii)\ P(S_{n+1} = k \,|\, S_n = \ell) = \dfrac{2+n-k}{2+n} \text{ si } \ell = k.\end{array}}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\big((S_n = \ell)\big)_{\ell \in [\![1,n+1]\!]}$, on a avec les résultats de la question 9 :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_n = \ell) \times \underbrace{P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)}_{=0 \text{ si } \ell \notin \{k-1,k\}} \\
&= P(S_n = k-1) \times P(S_{n+1} = k \mid S_n = k-1) + P(S_n = k) \times P(S_{n+1} = k \mid S_n = k) \\
&= P(S_n = k-1) \times \frac{k-1}{2+n} + P(S_n = k) \times \frac{2+n-k}{2+n}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![2, n+1]\!],\ P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).}$$

11. Par la question 3 appliquée avec $b = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(S_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
*Initialisation :* D'après la question 8 et le résultat admis ensuite avec $n = 1$, on a bien :

$$P(S_1 = 1) = P(S_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

*Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(S_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
D'après la question 8 et le résultat admis ensuite appliqué avec $n+1$, on a :

$$P(S_{n+1} = 1) = P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}.$$

Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. On a par la question 10 et l'hypothèse de récurrence ($k-1 \in [\![1, n+1]\!]$, $k \in [\![1, n+1]\!]$) :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1, n+1]\!].}$$

## Exercice 2 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ *(CCINP PC 2020)*

12. Chaque variable $X_k$ modélise le pas effectué par le pion à l'instant $k$ (elle prend la valeur $+1$ si le déplacement se fait sur la droite et la valeur $-1$ si le déplacement se fait sur la gauche, de façon équiprobable) donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ modélise la position du pion à l'instant $n$.
Comme $S_0 = 0$, $S_0$ modélise aussi la position du pion à l'instant 0.

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } S_n \text{ représente la position du pion à l'instant } n.}$$

13. On a $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$.
Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a $(S_1 = 0) = \varnothing$ donc $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$.
Enfin, on a $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big((X_1 = k)\big)_{k \in X_1(\Omega)}$ c'est-à-dire $\big((X_1 = -1), (X_1 = 1)\big)$, on a

$$\begin{aligned}
p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P\big((X_1 = 1) \cap (X_1 + X_2 = 0)\big) + P\big((X_1 = -1) \cap (X_1 + X_2 = 0)\big) \\
&= P\big((X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)\big) + P\big((X_2 = -1) \cap (X_1 = 1)\big) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_0 = 1,\ p_1 = 0 \text{ et } p_2 = \frac{1}{2}.}$$

14. Si $n$ est impair alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs.
En d'autres termes, si on note $p$ le nombre de déplacements vers la gauche réalisés en $n$ étapes, alors le pion a fait aussi $n - p$ déplacements vers la droite, donc sa position à l'instant $n$ est $-p + n - p = n - 2p$ qui est un nombre impair.
Ainsi, la variable aléatoire $S_n$ ne prend comme valeurs que des nombres impairs.
On en déduit que $(S_n = 0) = \varnothing$ (puisque 0 est pair) donc $p_n = P(S_n = 0) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair alors on a } p_n = 0.}$$

15. On a $Y_k(\Omega) = \left(\frac{X_k+1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right\} = \{0,1\}$ donc $Y_k$ suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi :

$$\boxed{Y_k \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$$

16. Les variables $Y_1, \dots, Y_n$ suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre $\dfrac{1}{2}$ et sont indépendantes (puisque les variables $X_1, \dots, X_n$ le sont) donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n > 0,\ Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ :

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, on a :

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2}$$

donc $\boxed{S_n = 2Z_n - n.}$

17. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N},\ p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.}$$

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leqslant 1$ donc $p_n = O(1)$.
Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 1x^n$ (série géométrique) c'est-à-dire $\boxed{R_p \geqslant 1.}$

19. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m}k}{2^m\prod_{k=1}^{m}k}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right).}$$

20. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in ]-1,1[$, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in ]-1,1[$, comme $(-x^2) \in ]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour $p_n$ dans la partie précédente, on a pour tout $x \in ]-1,1[$ (on a $R_p \geqslant 1$),

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}p_n x^n &= p_0+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2}-k+1)x^{2n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ convient.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in ]-1,1[,\ f(x) = (1-x^2)^{-1/2}.}$$

21. Si $(T=1)$ se réalise alors $(S_1=0)$ se réalise c'est-à-dire $(T=1) \subset (S_1=0)$.
On en déduit que $q_1 = P(T=1) \leqslant P(S_1=0) = p_1 = 0$ d'où $q_1 = 0$.
Comme $(S_1=0)$ est l'événement impossible, on a par définition de $T$ : $(T=2) = (S_2=0)$.
Ainsi, $q_2 = P(T=2) = P(S_2=0) = p_2$ donc $q_2 = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{q_1 = 0 \text{ et } q_2 = \frac{1}{2}.}$$

22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T=n)|x|^n \leqslant P(T=n).$$

Ainsi, $P(T=n)$ est un majorant de l'ensemble $\{|g_n(x)|, x \in [-1,1]\}$ et $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ en est le plus petit d'où $0 \leqslant \|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leqslant P(T=n)$.
Or, la série $\sum_{n\geqslant 0} P(T=n)$ converge (par $\sigma$-additivité car les événements $(T=n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles).
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} \|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 0} g_n \text{ converge normalement sur } [-1,1].}$$

Comme la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$, elle converge simplement sur $[-1,1]$ donc en particulier, la série $\sum_{n\geqslant 0} g_n(1)$ converge.
Comme $R_q = \sup\{r \geqslant 0,\ \sum_{n\geqslant 0} q_n r^n \text{ converge}\}$, on en déduit que :

$$\boxed{R_q \geqslant 1.}$$

23. Comme $R_p \geqslant 1$ et $R_q \geqslant 1$, on a $\min(R_p, R_q) \geqslant 1$ donc par produit de Cauchy, on a pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{0-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n \in \mathbb{N}^*) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ f(x)g(x) = -1 + f(x).}$$

24. Comme, pour tout $x \in ]-1,1[$, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 20.), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-1/2} g(x) = (1-x^2)^{-1/2} - 1$$

donc en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ \ g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.}$$

Pour tout $x \in ]-1,1[$, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n.$$

Avec $\alpha = 1/2$, pour tout $x \in ]-1,1[$, comme $(-x^2) \in ]-1,1[$, on a :

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}.}$$

25. Pour tout $x \in ]-1,1[$, on a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$.
Par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ q_{2n+1} = 0.}$$

26. Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a :

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n$ est continue sur $[-1,1]$ et la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$ (d'après la question 22) donc par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$.
Elle est donc en particulier continue en 1 d'où :

$$g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 - \sqrt{1 - x^2}) = 1 \quad \text{(d'après la question 24.).}$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} P(T = +\infty) = 0 \text{ donc l'événement } (T = +\infty) \text{ est négligeable.} \\ \text{Le pion reviendra à l'origine à un instant donné presque sûrement.} \end{array}}$$

Sujet 2 - Nombre de sites visités par une marche aléatoire *(Mines MP 2020)*

1. On a par la formule du binôme :

$$(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k.$$

Le cœfficient devant $X^n$ est donc $\binom{2n}{n}$.
Par ailleurs, on a aussi $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$.
Le coefficient devant $X^n$ du produit $(X+1)^n (X+1)^n$ est donc en développant (ou par produit de Cauchy) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Par unicité des cœfficients d'un polynôme dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.}$$

2. D'après la formule de Stirling, on a $\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$.
Ainsi :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.}$$

3. Soit $\alpha \in ]0,+\infty[$. Notons $f : t \mapsto 1/t^\alpha$ qui est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

- On suppose que $\alpha \in ]0,1[$.
En sommant pour $k$ allant de 1 à $n-1$, on obtient pour tout $n \geqslant 2$ avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)$$

d'où :

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(1).$$

On a de plus comme $\alpha \neq 1$ :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Comme $1-\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ et $n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{1-\alpha})$ donc on a aussi $\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Par le théorème des gendarmes (version équivalents), on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.}$$

- On suppose que $\alpha \in ]1,+\infty[$.
En sommant pour $k$ allant de $n+1$ à $N$, on obtient pour tout $(n,N) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n \leqslant N$ avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} f(k) = \sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leqslant \int_n^N f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{N} f(k) = \sum_{k=n+1}^{N} f(k) + f(n).$$

Comme la série de Riemann et l'intégrale de Riemann en $+\infty$ sont convergentes puisque $\alpha > 1$, on obtient par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) + f(n)$$

d'où :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

On a de plus comme $\alpha > 1$ :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^{+\infty} = \frac{-n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Comme $n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{1-\alpha})$, on a aussi $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.
Par le théorème des gendarmes (version équivalents), on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

4. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in ]-1,1[$, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

En considérant le cas $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(-\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^n2^n} = (-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}.
\end{aligned}$$

Soit $x\in]-1,1[$. Comme $-x\in]-1,1[$, on a alors :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}(-x)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}x^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}x^n.}$$

5. La suite $(\mathbb{P}(S_n=0_d)1^n)_{n\in\mathbb{N}}=(\mathbb{P}(S_n=0_d))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\mathbb{P}(S_n=0_d)\leqslant1$.
Ainsi, $R\left(\sum_{n\geqslant0}\mathbb{P}(S_n=0_d)x^n\right)=\sup\{r\in\mathbb{R}_+,\ (\mathbb{P}(S_n=0_d)r^n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est bornée}\}\geqslant1$.

De la même façon, on montre que $R\left(\sum_{n\geqslant0}\mathbb{P}(R=n)x^n\right)\geqslant1$.

$$\boxed{\text{Les séries entières définissant } F \text{ et } G \text{ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à } 1.}$$

Par le cours, on sait que la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence donc :

$$\boxed{\text{les fonctions } F \text{ et } G \text{ sont définies et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } ]-1,1[.}$$

Comme $R$ est à valeurs de $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$, on a $(R\neq+\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(R=n)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(R=n)$ car $(R=0)=\varnothing$.
Comme les événements $((R=n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, on en déduit par $\sigma$-additivité que la série $\sum_{n\geqslant0}P(R=n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}P(R=n)=P(R\neq+\infty)$.
On a ainsi établi que $G$ est bien définie en 1 et :

$$\boxed{G(1)=P(R\neq+\infty).}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $g_n: x\mapsto P(R=n)x^n$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g_n$ est continue sur $[-1,1]$ en tant que fonction polynômiale.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in[-1,1]$, $|g_n(x)|\leqslant P(R=n)$ donc $0\leqslant\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}\leqslant P(R=n)$ (car $P(R=n)$ est un majorant de $\{|g_n(x)|,\ x\in[-1,1]\}$ et $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ en est le plus petit).
Comme la série $\sum_{n\geqslant0}P(R=n)$ converge, on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum_{n\geqslant0}\|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } G \text{ est définie et continue sur } [-1,1].}$$

6. Soit $k$ et $n$ deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$.
Si $k = n$ alors $S_n - S_k$ est la variable constante égale à $0_d$ donc $S_n - S_k = S_0 = S_{n-k}$ donc a fortiori, $S_n - S_k \sim S_{n-k}$.
On suppose désormais $k < n$.
On a alors $S_n - S_k = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$ et $S_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} X_i$.
Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k}) \in (\mathbb{Z}^d)^{n-k}$.
Comme $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de $X$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_{n-k}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k})\right) &= \prod_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}\left(X_i = \varepsilon_i\right) = \prod_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}\left(X = \varepsilon_i\right) = \prod_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i = \varepsilon_i\right) \\ &= \mathbb{P}\left((X_{k+1}, \ldots, X_n) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k})\right).\end{aligned}$$

Ainsi : $(X_1, \ldots, X_{n-k}) \sim (X_{k+1}, \ldots, X_n)$ (c'est-à-dire les vecteurs $(X_1, \ldots, X_{n-k})$ et $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ suivent la même loi).
En utilisant la fonction $f : (x_1, \ldots, x_{n-k}) \in (\mathbb{Z}^d)^{n-k} \mapsto \sum_{i=1}^{n-k} x_i \in \mathbb{Z}^d$, on obtient que :

$$f((X_1, \ldots, X_{n-k}) \sim f\left(X_{k+1}, \ldots, X_n\right) \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^{n-k} X_i \sim \sum_{i=k+1}^{n} X_i.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{S_n - S_k \sim S_{n-k}.}$$

Remarquons qu'on a $(R = k) \subset (S_k = 0_d)$ d'où :

$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}((S_n - S_k = 0_d) \cap (R = k)) \overset{(\star)}{=} \mathbb{P}(S_n - S_k = 0_d)\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(R = k).$$

Pour justifier $(\star)$, montrons que les événements $(S_n - S_k = 0_d)$ et $(R = k)$ sont indépendants.
Si $k = n$ alors $(S_n - S_k = 0_d) = \Omega$ et $\mathbb{P}(S_n - S_k = 0_d) = 1$ donc :

$$\mathbb{P}((S_n - S_k = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(S_n - S_k = 0_d)\mathbb{P}(R = k).$$

Supposons désormais $k < n$.
On remarque que $(S_n - S_k = 0_d) = \left(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0_d\right)$ et $(R = k) = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i = 0_d\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{j} X_i \neq 0_d\right)\right)$ avec la convention $\bigcap_{j=1}^{0} \star_j = \Omega$ pour le cas $k = 1$. Ainsi :

$$(R = k) = \left(\left(\sum_{i=1}^{1} X_i, \sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} X_i, \sum_{i=1}^{k} X_i\right) \in \left(\mathbb{Z}^d \smallsetminus \{0_d\}\right)^{k-1} \times \{0_d\}\right).$$

Comme $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n$ sont indépendantes, par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\sum_{i=k+1}^{n} X_i$ et $\left(\sum_{i=1}^{1} X_i, \sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} X_i, \sum_{i=1}^{k} X_i\right)$ sont indépendantes.
On en déduit que les événements $(R = k)$ et $(S_n - S_k = 0_d)$ sont indépendants.
Ainsi, on a établi :

$$\boxed{\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(R = k).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k > n$, $(R = k) \cap (S_n = 0_d) = \varnothing = (R = +\infty) \cap (S_n = 0_d)$ car si la marche aléatoire est en $0_d$ à l'instant $n$, elle a bien effectué un retour en $0_d$ et ceci, strictement avant l'instant $k$.

La famille $((R=k))_{k\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}}$ est un système complet d'événements donc par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(S_n=0_d)=\mathbb{P}\left((R=+\infty)\cap(S_n=0_d)\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left((R=k)\cap(S_n=0_d)\right)=0+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left((R=k)\cap(S_n=0_d)\right).$$

Avec l'égalité précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n=0_d)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(R=k)\mathbb{P}(S_{n-k}=0_d).}$$

7. Par produit de Cauchy de séries entières de rayon 1, on a :

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ F(x)G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(R=k)\mathbb{P}(S_{n-k}=0_d)\right)x^n.$$

Pour $n=0$, on a $\sum_{k=0}^{0}\mathbb{P}(R=k)\mathbb{P}(S_{n-k}=0_d)=\mathbb{P}(R=0)\mathbb{P}(S_0=0_d)=0\times 1=0$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(R=k)\mathbb{P}(S_{n-k}=0_d)=\mathbb{P}(R=0)\mathbb{P}(S_n=0_d)+\mathbb{P}(S_n=0_d)=\mathbb{P}(S_n=0_d).$$

Ainsi :

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ F(x)G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0_d)x^n=-\mathbb{P}(S_0=0_d)+\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0_d)x^n=-1+F(x).$$

On a donc :

$$\boxed{\forall x\in\,]-1,1[\,,\ F(x)=1+F(x)G(x).}$$

On a donc pour tout $x\in\,]-1,1[\,,\ F(x)\left(1-G(x)\right)=1$ donc $1-G(x)\neq 0$ et $F(x)=\dfrac{1}{1-G(x)}$.
Selon la question 5, comme $G$ est continue en 1, on a :

$$\lim_{x\to 1^-}G(x)=G(1)=P(R\neq+\infty).$$

Si $\mathbb{P}(R\neq+\infty)=1$ alors $\lim_{x\to 1^-}(1-G(x))=0^+$ car on a de plus pour tout $x\in[0,1]$ :

$$G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(R=n)x^n\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}P(R=n)=G(1)=1$$

(par croissance de la somme, séries toutes convergentes).
On en déduit que $\lim_{x\to 1^-}F(x)=+\infty$.
Si $\mathbb{P}(R\neq+\infty)\neq 1$ alors $1-G(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}1-\mathbb{P}(R\neq+\infty)>0$ donc $\lim_{x\to 1^-}F(x)=\dfrac{1}{1-\mathbb{P}(R\neq+\infty)}$.

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{P}(R\neq+\infty)=1 \text{ alors } \lim_{x\to 1^-}F(x)=+\infty \text{ et si } \mathbb{P}(R\neq+\infty)\neq 1 \text{ alors } \lim_{x\to 1^-}F(x)=\frac{1}{1-\mathbb{P}(R\neq+\infty)}.}$$

8. Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$. Comme la série à termes positifs $\sum c_k$ diverge, la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$. Ainsi, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $\sum_{k=0}^{n}c_k\geqslant A+1$.

Comme la fonction polynômiale $\varphi:x\mapsto\sum_{k=0}^{N}c_kx^k$ est continue en 1, il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que pour tout

$x \in ]1-\alpha, 1[$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(1) - \frac{1}{2} \geqslant A + \frac{1}{2} > A$.
Comme tous les termes sont positifs (et série convergente), on a aussi pour tout $x \in ]1-\alpha, 1[$ :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{N} c_k x^k > A.$$

On a donc établi qu'il existe $\alpha \in ]0,1[$ tel que pour tout $x \in ]1-\alpha, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$.
Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty.}$$

9. $\star$ On suppose que $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente.
La série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) 1^n$ étant divergente, le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n$ est inférieur ou égal à 1 donc avec la question 5, on en déduit que cette série entière a pour rayon de convergence 1 et ses cœfficients sont tous positifs.
Par la question précédente, on en déduit que :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = 0_d) x^k \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty.$$

Ainsi, d'après la question 7, on a nécessairement $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.
$\star$ On suppose que $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.
Par la question 7, on a donc $F(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$.
Or, par l'absurde, si la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ était convergente, on pourrait montrer, comme on l'a fait pour $G$ à la question 5, que $F$ serait continue sur $[-1,1]$ donc en particulier, $F$ aurait une limite finie en 1, absurde.
Donc la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente.
On a donc établi l'équivalence :

$$\boxed{\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) \text{ est divergente si et seulement si } \mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1.}$$

10. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(R > i)$ est l'événement « la marche aléatoire ne retourne pas en $0_d$ entre les instants 1 et $i$ ».
On a donc :

$$(R > i) = \bigcap_{k=1}^{i} (S_k \neq 0_d) = (X_1 \neq 0_d) \cap (X_1 + X_2 \neq 0_d) \cap \cdots \cap \left( \sum_{k=1}^{i} X_k \neq 0_d \right).$$

Par ailleurs, $(Y_i = 1)$ est l'événement « la marche aléatoire ne retourne pas à l'instant $i$ en un endroit déjà visité auparavant ».
On a donc :

$$(Y_i = 1) = \bigcap_{k=0}^{i-1} (S_i \neq S_k) = \bigcap_{k=0}^{i-1} (S_i - S_k \neq 0_d) = (X_i \neq 0_d) \cap (X_i + X_{i-1} \neq 0_d) \cap \cdots \cap \left( \sum_{k=1}^{i} X_k \neq 0_d \right).$$

On montre comme à la question 6 que les vecteurs aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_i)$ et $(X_i, X_{i-1}, \ldots, X_1)$ suivent la même loi (car les variables $X_1, \ldots, X_i$ suivent toutes la même loi que $X$ et sont indépendantes) donc en utilisant la fonction $f : (x_1, \ldots, x_i) \in (\mathbb{Z}^d)^i \mapsto \left( x_1, x_1 + x_2, \ldots, \sum_{k=1}^{i} x_k \right) \in (\mathbb{Z}^d)^i$, on obtient que $f(X_1, X_2, \ldots, X_i) \sim f(X_i, X_{i-1}, \ldots, X_1)$.
On en déduit que :

$$P(R > i) = P\left( f(X_1, X_2, \ldots, X_i) \in \left( \mathbb{Z}^d \setminus \{0_d\} \right)^i \right) = P\left( f(X_i, X_{i-1}, \ldots, X_1) \in \left( \mathbb{Z}^d \setminus \{0_d\} \right)^i \right) = P(Y_i = 1).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \ P(Y_i = 1) = P(R > i).}$$

Par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Par linéarité de l'espérance (toutes les variables en jeu ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles donc sont d'espérance finie), on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i)$$

car pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(R > i)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i).}$$

11. On remarque que $((R > i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion.

Ainsi, par la propriété de continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}(R > i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} (R > j)\right) = \mathbb{P}(R = +\infty).$$

Or, d'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{E(N_n)}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(R > i)$.

À l'aide du théorème de Cesàro, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{E(N_n)}{n} = \mathbb{P}(R = +\infty).}$$

12. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_i = \frac{1+X_i}{2}$ de sorte que $Y_i \sim \mathscr{B}(p)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme les variables $X_1, \ldots, X_m$ sont indépendantes, les variables $Y_1, \ldots, Y_m$ le sont également et on sait alors que la variable $T_m = \sum_{i=1}^{m} Y_i$ suit la loi binômiale de paramètres $m$ et $p$.

Par somme, on a $T_m = \dfrac{m}{2} + \dfrac{1}{2} S_m$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant ce qui précède avec $m = 2n+1$, on obtient :

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n+1} = n + \frac{1}{2}) = 0$$

car $T_{2n+1}$ ne prend que des valeurs entières (puisque $T_{2n+1}(\Omega) = [\![0, 2n+1]\!]$).

En utilisant ce qui précède avec $m = 2n$ pour $n \geqslant 1$, on obtient :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n q^{2n-n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

car $T_{2n} \sim \mathscr{B}(2n, p)$.

On remarque que l'égalité est encore vraie pour $n = 0$ car $\mathbb{P}(S_0 = 0) = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \tbinom{2n}{n}(pq)^n.}$$

13. Soit $x \in ]-1, 1[$. On a, à l'aide de la question 12, en passant par les sommes partielles (toutes les séries en jeu convergent) :

$$F(x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(pqx^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left(4pqx^2\right)^n.$$

On a $pq = p(1-p)$. Or, le trinôme du second degré $t \mapsto t(1-t)$ atteint son maximum en $\dfrac{1}{2}$ et ce maximum vaut donc $\dfrac{1}{4}$.

On a donc $0 \leqslant 4pq \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant 4pqx^2 \leqslant x^2 < 1$.
En utilisant la question 4, on en déduit que $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \neq 0$.
Par la question 7, on obtient $G(x) = 1 - \dfrac{1}{F(x)}$ d'où :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in ]-1,1[,\ G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}.}$$

Par la question 5, la fonction $G$ est continue en 1 et on a :

$$\mathbb{P}(R \neq +\infty) = G(1) = \lim_{x \to 1^-} G(x) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} = 1 - \sqrt{(1-2p)^2}$$

donc $\mathbb{P}(R = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(R \neq +\infty) = |2p-1|$.
Or, $p - q = p - (1-p) = 2p - 1$ d'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(R = +\infty) = |p-q|.}$$

En utilisant la question 4, on a pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(1/2 - i)}{n!}(-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2i-1)}{2^n n!} x^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{2^n n!} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\left((n-1)!\right)2^n n!} x^n\end{aligned}$$

donc $\sqrt{1-x} = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1} n} x^n$.
Comme $4pqx^2 \in ]-1,1[$, on a alors :

$$G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1} 4^n (pq)^n}{2^{2n-1} n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n} x^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient la loi de $R$ avec $R(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ :

$$\boxed{\mathbb{P}(R = +\infty) = |p-q|,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(R = 2n-1) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(R = 2n) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n}.}$$

14. Comme $p = q = 1/2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(R = 2n) = \dfrac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}$.
Or d'après la question 2, $\dbinom{2n-2}{n-1} \sim \dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n-1}} \sim \dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{P}(R = 2n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}.}$$

On remarque que $\mathbb{P}(R = +\infty) = |p-q| = 0$ donc $R$ est presque sûrement à valeurs dans $2\mathbb{N}^*$.
On a pour tout $p \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P}(R > 2p) = \mathbb{P}(R > 2p+1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty} (R = 2k)\right) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = 2k)$$

par $\sigma$-additivité car les événements $(R = 2k)$ sont deux à deux incompatibles.
Ainsi, en utilisant la sommation des relations de comparaison dans le cas convergent (car $\frac{3}{2} > 1$) avec des séries à termes positifs puis avec la question 3, on obtient quand $p$ tend vers $+\infty$ :

$$\mathbb{P}(R > 2p) = \mathbb{P}(R > 2p+1) \sim \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \sim \frac{1}{(3/2-1)2\sqrt{\pi} p^{3/2-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} p^{1/2}}.$$

On a donc $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2p)^{1/2}\mathbb{P}(R>2p)\xrightarrow[p\to+\infty]{}1$ et $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2p+1)^{1/2}\mathbb{P}(R>2p+1)\xrightarrow[p\to+\infty]{}1$ donc par propriété des suites extraites d'indices pairs et impairs, on obtient $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}i^{1/2}\mathbb{P}(R>i)\xrightarrow[i\to+\infty]{}1$ d'où :

$$\mathbb{P}(R>i)\underset{i\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}i^{1/2}}.$$

En utilisant de nouveau la question 3 et les sommations des relations de comparaison (cette fois-ci dans le cas divergent car $\frac{1}{2}\leqslant 1$, les séries sont bien à termes positifs), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}n^{1-1/2}}{\sqrt{\pi}(1-1/2)}.$$

Comme $\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et $E(N_n)=1+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i)$ selon la question 10, on en déduit l'équivalent :

$$\boxed{E(N_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}.}$$

15. On considère la série entière $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(R>k)x^k$. On montre comme à la question 5 qu'elle a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et on note $H$ sa somme.
On a :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \overline{(R>k)}=(R\leqslant k)=\bigcup_{i=0}^{k}(R=i)\quad\text{(événements deux à deux incompatibles).}$$

On en déduit que pour tout $x\in]-1,1[$ (toutes les séries en jeu convergent) :

$$H(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k-\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(R\leqslant k)x^k=\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(R=i)\right)x^k=\frac{1}{1-x}-\frac{G(x)}{1-x}$$

par produit de Cauchy de deux séries entières de rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1.
En effectuant un nouveau produit de Cauchy puis en utilisant la question 7, on a pour tout $x\in]-1,1[$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0_d)\mathbb{P}(R>n-k)\right)x^n=F(x)H(x)=\frac{F(x)-F(x)G(x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{1=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0_d)\mathbb{P}(R>n-k).}$$

16. Pour $n=0$, on a $(S_{2\cdot 0}=0_2)=(S_0=0_2)=\Omega$ et on a bien $\left(\frac{\binom{2\cdot 0}{0}}{4^0}\right)^2=1=\mathbb{P}(\Omega)$.

On suppose désormais que $n\geqslant 1$.
On note $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$ et

$$\Lambda=\left\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\{e_1,-e_1,e_2,-e_2\},\ \sum_{j=0}^{2n}\varepsilon_j=0_2\right\}.$$

On a alors :

$$(S_{2n}=0_2)=\left(\sum_{i=1}^{2n}X_i=0\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}((X_1,\ldots,X_{2n})=\lambda).$$

Comme il s'agit d'une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles, on a donc :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_{2n}) = \lambda\right) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \Lambda} \mathbb{P}\left((X_1 = \varepsilon_1) \cap \dots \cap (X_{2n} = \varepsilon_{2n})\right).$$

Par indépendance mutuelle des $X_i$ qui suivent toutes la même loi que $X$, on obtient :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \Lambda} \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(X = \varepsilon_i) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \Lambda} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = |\Lambda| \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

où $|\Lambda|$ désigne le cardinal de l'ensemble $\Lambda$.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\Lambda_k = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \Lambda,\ \mathrm{card}\left(\{i \in [\![1, 2n]\!],\ \varepsilon_i = e_1\}\right) = k\}$ de sorte que l'on ait l'union disjointe

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^{n} \Lambda_k \quad \text{puis} \quad |\Lambda| = \sum_{k=0}^{n} |\Lambda_k|.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On va dénombrer les éléments de $\Lambda_k$.
Pour caractériser un élément de cet ensemble, on commence par choisir les positions des $e_1$, puis des $-e_1$ et enfin des $e_2$ ; les places restantes seront attribuées aux $-e_2$.
Parmi les places dévolues aux $e_1$, on choisit les $k$ positions des $e_1$, on en trouve $\binom{2n}{k}$ possibles.
Parmi les places dévolues aux $-e_1$, il y en a nécessairement $k$ également pour que la somme soit nulle, on en trouve $\binom{2n-k}{k}$ possibles.
Il reste alors $2n - 2k$ places à attribuer à parts égales aux $e_2$ et $-e_2$.
Il y a donc $\binom{2n-2k}{n-k}$ possibilités pour les $e_2$.
Ainsi, par principe multiplicatif :

$$|\Lambda_k| = \binom{2n}{k} \times \binom{2n-k}{k} \times \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{(2n)! \cdot (2n-k)! \cdot (2n-2k)!}{(2n-k)! \cdot k! \cdot (2n-2k)! \cdot k! \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!} = \binom{2n}{n} \times \left(\binom{n}{k}\right)^2$$

donc en utilisant la question 1 :

$$|\Lambda| = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2.}$$

Par la question 2, on a $\binom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ donc on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}.}$$