

Exercices

Exercice 1. Soit E un espace euclidien et $N : x \mapsto \|x\|$.

1. L'application N est-elle différentiable en 0 ?
2. Montrer que N est de classe \mathcal{C}^1 sur $E \setminus \{0\}$ et déterminer la différentielle de N .
Indication : considérer $g = N^2$.
3. Déterminer $\nabla N(x)$.

Exercice 2. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Indication : $\sin(y) = y + o((y^2)) = y + y^2 \alpha(y)$.

Exercice 3. On considère \mathbb{C} muni de sa structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto 1/z \end{cases}$ est différentiable sur \mathbb{C}^* et donner sa différentielle.

Exercice 4. Montrer que l'application

$$f : \begin{matrix} \text{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{matrix}$$

est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x)\}$; avec $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}.$$

Montrer que f se prolonge sur \mathbb{R}^2 en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 .

Indication : On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité sur \mathbb{R} .

Exercice 6. Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction g définie par $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur son ouvert V de définition et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f .

2. On considère l'équation

$$(E_0) : \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

- (a) Montrer que toute solution de (E_0) sur \mathbb{R}^2 est constante.
- (b) Pour $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) sur U si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et 2π -périodique telle que pour tout $(x, y) \in U$, $f(x, y) = \varphi(\theta)$ avec θ tel que $(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \theta, \sin \theta)$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$(E) : \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Exercices CCINP

Exercice 7 (CCINP 33). On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .
3. f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ? Justifier.

Exercice 8 (CCINP 52). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien \mathbb{R}^2 .
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur \mathbb{R}^2 .
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
(a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 9 (CCINP 57).

1. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

(a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.

(b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

2. On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

(b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .