PROBABILITÉS

Questionnaire sur le cours

I. Espaces probabilisés

On rappelle qu'un événement peut être vu comme un sous-ensemble de l'univers Ω ou comme un fait qui peut être réalisé ou non suivant le résultat de l'expérience aléatoire. Pour les définitions avec l'indication $\star$, on donnera deux versions des énoncés demandés : une en langage ensembliste (avec des opérations entre ensembles) et une en langage probabiliste (interprétation « en français » en terme de réalisation des événements).

1. (a) Soit A et B deux événements.
   Définir ($\star$) « A et B sont incompatibles » puis « A et B sont indépendants ».
   (b) *Exemple :* On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.
   Pour $k \in \{1,2\}$, on note F_k (respectivement P_k) l'événement « On obtient *face* (respectivement *pile*) au k-ème lancer ».
   Les événements F_1 et P_1 sont-ils incompatibles ? indépendants ?
   Les événements F_1 et F_2 sont-ils incompatibles ? indépendants ?

2. (a) Donner la définition ($\star$) d'un système complet d'événements puis d'un système quasi-complet d'événements.
   (b) Quelle notion implique l'autre ? Le prouver.
   (c) Soit X une variable aléatoire discrète. Donner un exemple de système complet d'événements lié à cette variable.

3. Soit A et B deux événements.
   (a) Donner la définition ($\star$) de $A \subset B$.
   (b) Comparer $P(A)$ et $P(B)$.
   (c) *Application :* On suppose que $P(A) = 0$ et $P(B) \neq 0$. Montrer que $P_B(A) = 0$.

4. Soit A et B deux événements.
   (a) Rappeler la définition ($\star$) de l'événement $A \setminus B$.
   (b) Que vaut $P(A \setminus B)$?

5. Soit A et B deux événements.
   (a) Donner la formule permettant de calculer $P(A \cup B)$ dans le cas général.
   (b) Sous quelle hypothèse a-t-on $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
   (c) Donner la formule permettant de calculer $P(A \cap B)$ dans le cas général.
   (d) Sous quelle hypothèse a-t-on $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$?
   (e) *Application :* On suppose que A et B sont incompatibles.
   Exprimer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ en fonction de $P(A)$ et $P(B)$.

6. Soit A et B deux événements. On suppose connus $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.
   Déterminer $P(B \cap \overline{A})$, $P(B)$ et $P_B(A)$.

7. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements.
   (a) Définir ($\star$) les événements $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
   (b) Quels résultats de cours peut-on utiliser pour calculer les probabilités suivantes ?
   On précisera soigneusement les hypothèses.
   - $\star$ $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$? $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$? (où $n \in \mathbb{N}^*$)
   - $\star$ $P\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$? $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$?

8. (a) Énoncer la formule des probabilités totales.
   (b) *Application 1 :* Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. On suppose connue la loi du couple. Comment peut-on obtenir les lois marginales ?
   (c) *Application 2 :* Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le vecteur-colonne de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = \big(P(X_n = i)\big)_{1\leqslant i\leqslant N}$ et M_n la matrice de $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ définie par $M_n = \big(P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)\big)_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}$.
   i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = M_n V_n$.
   ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 1 est une valeur propre de $M_n^\top$ et de M_n.

II. Variables aléatoires discrètes

1. (a) Que donne-t-on pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X ?
   (b) Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
   On suppose connues les probabilités $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Comment peut-on calculer $P(X = +\infty)$? Justifier.

2. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Rappeler la définition de sa fonction génératrice G_X.
   (b) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière définissant G_X ?
   Que peut-on dire de l'ensemble de définition de G_X ?
   Que peut-on dire de la régularité de G_X (continuité, dérivabilité...) ?
   Que vaut $G_X(1)$?
   (c) On suppose que la fonction G_X est connue explicitement.
   Comment peut-on retrouver la loi de X ? (On proposera deux méthodes.)

3. Rappeler la définition des cinq lois usuelles, leur espérance, leur variance et leur fonction génératrice.
   Donner les schémas-types des lois binômiale et géométrique.

4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Donner deux méthodes permettant de déterminer la loi de $X+Y$.

5. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction des $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis $P(X = n)$ en fonction des $P(X \geqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Proposer deux méthodes permettant de déterminer les lois de $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$.

6. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Donner précisément la définition de l'espérance et de la variance de X.
   Quel lien existe-t-il entre les deux concernant leur existence ?

7. Que savez-vous du signe d'une variance ? d'une espérance ?
   Que peut-on déduire de l'assertion $V(X) = 0$? et de l'assertion $E(X) = 0$?

8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Proposer trois façons de déterminer $E(X)$.

9. (a) Si l'on connaît la loi de X, comment peut-on étudier l'existence et calculer la valeur de $E(X^2)$?
   (b) Si l'on connaît $E(X)$ et $V(X)$, comment peut-on calculer $E(X^2)$?

10. Formuler des hypothèses permettant de justifier l'existence des quantités suivantes et donner les formules correspondantes. On pourra préciser, lorsque cela est pertinent, le cas particulier où les variables considérées sont indépendantes.

$$E(aX) \quad E(X+Y) \quad E(aX+b) \quad E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) \quad E(XY) \quad E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$V(aX) \quad V(X+Y) \quad V(aX+b) \quad V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \quad V\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right)$$

$$\operatorname{Cov}(X,X) \quad \operatorname{Cov}(aX+b,Y) \quad \operatorname{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k\right)$$

11. (a) Citer le théorème du transfert.
    (b) *Application 1 :* Donner la valeur des sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k+1) x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}.$$

    (c) *Application 2 :* On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.
    On définit la *fonction caractéristique* par $\Phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$.
    Montrer que Φ est définie sur $\mathbb{R}$ et en donner une expression explicite.

12. Donner toutes les lois associées à un couple de variables aléatoires (X,Y), en précisant pour chacune ce qu'on donne en pratique pour les définir.

13. Citer l'inégalité de Markov, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres.