ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Cours (Deuxième partie)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
On s'intéresse dans ce chapitre aux applications définies sur une partie A de E (non vide) à valeurs dans F.

I. Continuité d'une application entre espaces vectoriels normés

A. Définitions

Définition 1

Soit $f : A \subset E \to F$.

- Soit $a \in A$. On dit que f est *continue au point* a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leqslant \eta, \text{ on a } \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que f est *continue sur* A lorsque f est continue en tout point de A.

Si les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie alors la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies en raison de l'équivalence des normes.

B. Propriétés

Proposition 2 (*Caractérisation séquentielle*)

Soit $f : A \subset E \to F$. Soit $a \in A$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue au point a

(ii) pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

Proposition 3 (*Opérations*)

- Soit $f : A \to F$ et $g : A \to F$. Soit $a \in A$.
  Si f et g sont continues en a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g$ est continue en a.
- Soit $f : A \to \mathbb{K}$ et $g : A \to F$. Soit $a \in A$.
  Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a.
- Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : f(A) \to G$. Soit $a \in A$.
  Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

- On peut remplacer « en a » par « sur A ».
  Composition : si f est continue sur A et g est continue sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est continue sur A.
- L'ensemble des fonctions continues de A dans F, noté $\mathscr{C}(A, F)$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 4 (*Fonctions coordonnées*)

Soit $f : A \subset E \to F$. Soit $a \in A$.
On suppose que F est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B}$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, on note $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}$.
La fonction f est continue en a (resp. sur A) si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ sont continues en a (resp. sur A).

C. Exemples fondamentaux

1. Fonctions polynômiales

Définition 5

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Pour tout $x \in E$, on note $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

- On appelle *fonction monôme* sur E toute application du type $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} \end{array}$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$.
- On appelle *fonction polynômiale* sur E toute combinaison linéaire de fonctions monômes.

Proposition 6

Toute fonction polynômiale sur E est continue sur E.

Exemple 1 : Montrer que les fonctions suivantes sont continues.

1. $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(x^2 - y^2 - 2xy, \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, x\right) \end{array} \right.$
3. $\mathrm{tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array} \right.$

2. Applications lipschitziennes

Définition 7

Soit $f : A \subset E \to F$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.
On dit que f est *k-lipschitzienne sur A* lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

Cas particulier important : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, dont la dérivée est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.
En effet, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$ et donc par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.

Proposition 8

Toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A.

Exemple 2 : Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$ est continue sur E.

3. Applications linéaires et multilinéaires

Théorème 9

Si $f : E \to F$ est une application linéaire avec E de dimension finie alors f est continue sur E.

Définition 10

L'application $f : \prod_{j=1}^{p} E_j \to F$ est dite *multilinéaire* ou *p-linéaire* lorsque f est linéaire par rapport à chacune de ses variables c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_p) \in \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} E_j, \quad \begin{array}{ccc} E_i & \to & F \\ x_i & \mapsto & f(x_1, ..., x_i, ..., x_p) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

Théorème 11

Si $f : \prod_{j=1}^{p} E_j \to F$ est une application multilinéaire avec $E_1, \ldots, E_p$ de dimension finie alors f est continue sur $\prod_{j=1}^{p} E_j$.

Exemples importants :

- *Déterminant :* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $\mathscr{B}$ une base de E.
  L'application $\begin{array}{ccc} E^p & \to & \mathbb{K} \\ (u_1,\dots,u_p) & \mapsto & \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p) \end{array}$ est continue sur E^p (car multilinéaire).
- *Produit matriciel :*
  L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (M,N) & \mapsto & MN \end{array}$ est continue sur $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ (car bilinéaire).

Exemple 3 :

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les applications suivantes sont continues.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}\right., \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (X,Y) & \mapsto & X^{\top}AY \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & X^{\top}AX \end{array}\right.$$

   sont continues.
2. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui converge vers M et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui converge vers N.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_nN_n = MN$.
   Soit $P \in GL_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} PM_nP^{-1} = PMP^{-1}$.

II. Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans ce paragraphe, $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

A. Sous-ensembles remarquables d'un espace vectoriel normé

1. Boules et sphères

Définition 12

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* et on note $B_o(a,r)$ l'ensemble :
$$B_o(a,r) = \{u \in E \text{ tel que } \|u-a\| < r\}.$$
- On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* et on note $B_f(a,r)$ l'ensemble :
$$B_f(a,r) = \{u \in E \text{ tel que } \|u-a\| \leqslant r\}.$$
- On appelle *sphère de centre a et de rayon r* et on note $S(a,r)$ l'ensemble :
$$S(a,r) = \{u \in E \text{ tel que } \|u-a\| = r\}.$$

$B_o(0_E,1)$ est la *boule unité ouverte*, $B_f(0_E,1)$ la *boule unité fermée* et $S(0_E,1)$ la *sphère unité.*

Exemple 4 :

1. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, déterminer $B_o(a,r)$, $B_f(a,r)$ et $S(a,r)$.

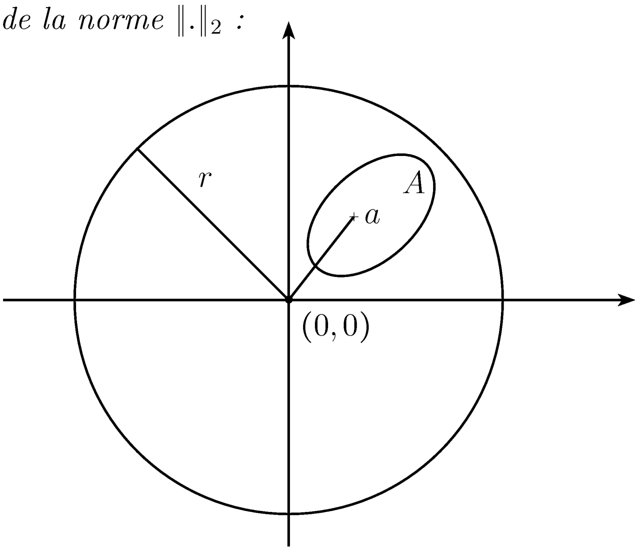
2. Représenter graphiquement la boule unité ouverte, la boule unité fermé et la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$.

2. Parties bornées et fonctions bornées

Définition 13

Soit A une partie de E.
On dit que A est *bornée* pour la norme $\|.\|$ lorsque A est incluse dans une boule fermée de centre 0_E, c'est-à-dire lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a \in A$, on a $\|a\| \leqslant r$.

Illustration dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_2$:



- Attention à l'ordre des quantificateurs. Le réel r doit être le même pour tous les vecteurs de A.
- Une partie A n'est pas bornée si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|a_n\| = +\infty$.
- En dimension finie, la notion de partie bornée ne dépend pas de la norme utilisée en raison de l'équivalence des normes.

Exemple 5 :

1. Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + xy \leqslant 1\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 1\}$ n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14

Les boules et les sphères sont des parties bornées.

Définition 15

Soit $f : A \subset E \to F$.
On dit que f est *bornée sur* A lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|f(x)\|_F \leqslant r$.

- La fonction f est bornée si et seulement si $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$ est une partie bornée de F.
- Si F est de dimension finie, cette notion ne dépend pas de la norme utilisée sur F.

3. Parties convexes

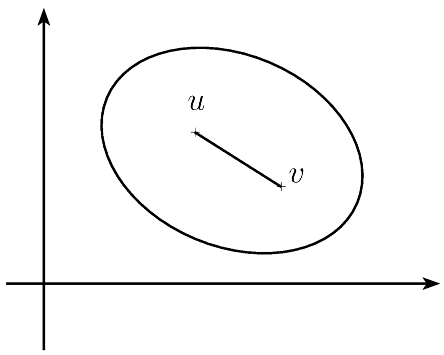
Définition 16

Soit A une partie de E.
On dit que A est *convexe* lorsque pour tout $(u,v) \in A^2$, pour tout $t \in [0,1]$, $tu+(1-t)v \in A$.

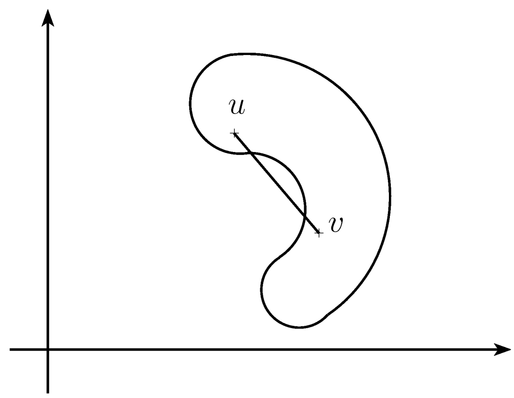
Cela signifie que pour tout couple (u,v) de vecteurs de A, le segment $[u,v]$ est inclus dans A.

Illustration dans $\mathbb{R}^2$:

Partie convexe



Partie non convexe



Exemple : Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Exemple 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe.

Proposition 17

Les boules sont des parties convexes.

B. Topologie

Les notions présentées dans ce paragraphe sont invariantes par passage à une norme équivalente. Par conséquent, si E est un espace vectoriel normé de **dimension finie** alors ces notions ne dépendent pas de la norme utilisée sur E puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.

1. Point intérieur, ouvert, fermé

Définition 18

Soit A une partie de E.

- Soit $a \in E$. On dit que a est un *point intérieur à* A lorsque :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B_o(a,r) \subset A.$$

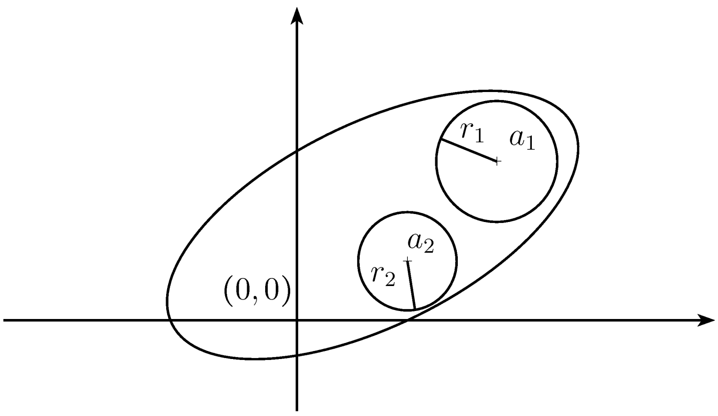
- On dit que A est *une partie ouverte de* E ou *un ouvert de* E lorsque tout point de A est un point intérieur à A c'est-à-dire :

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B_o(a,r) \subset A.$$

- On dit que A est *une partie fermée de* E ou *un fermé de* E lorsque $E \setminus A$ est un ouvert de E.

Bien noter l'ordre des quantificateurs dans la définition d'un ouvert. Le réel r dépend de a.

Illustration dans $\mathbb{R}^2$ *muni de la norme* $\|.\|_2$ *:*



La partie représentée ci-dessus est ouverte si et seulement si elle ne contient pas son bord.
La partie représentée ci-dessus est fermée si et seulement si elle contient son bord.

Exemples : Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont ceux du type $]a,b[$ avec a et b tels que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ et les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont ceux du type $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[$ et $\varnothing$ avec a et b réels tels que $a \leqslant b$.

Soit A une partie de E. On a les équivalences :

$$\big[A \text{ est un fermé } \Leftrightarrow E \setminus A \text{ est un ouvert}\big] \quad , \quad \big[A \text{ est un ouvert } \Leftrightarrow E \setminus A \text{ est un fermé}\big]$$

Mais attention, « fermé » n'est pas le contraire de « ouvert ».
Les ensembles E et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés. L'ensemble $[0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Proposition 19

- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
  Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Une réunion finie de fermés est un fermé.
  Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

2. Point adhérent, adhérence, partie dense

Définition 20

Soit A une partie de E.

- Soit $x \in E$. On dit que x est un *point adhérent à* A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \|x - a\| < \varepsilon.$$

- On appelle *adhérence de* A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
- La partie A est dite *dense dans* E lorsque $\overline{A} = E$.

- Le point x est adhérent à A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B_o(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.
- On a toujours $A \subset \overline{A} \subset E$.

Proposition 21

Soit A une partie de E.
A est un fermé de E si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition 22 (*Caractérisations séquentielles*)

Soit A une partie de E.

- Soit $x \in E$.
  x est un point adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.
- A est un fermé de E si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$ alors $\ell \in A$.
- A est dense dans E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Exemple 7 :

1. Déterminer l'adhérence de $[0, 1[$.
2. Prouver que $[-3, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
3. Prouver que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -2x + e^y > 0\}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 23

- Les boules ouvertes sont des ouverts.
- Les boules fermées et les sphères sont des fermés.

En particulier, les singletons $\{a\} = B_f(a, 0)$ pour $a \in E$, sont des fermés.

Exemple 8 : Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (sous-ensemble des matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (sous-ensemble des matrices antisymétriques) sont des fermés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si la suite $(A^p)_{p\geqslant 0}$ converge alors sa limite est 0_n (on pourra considérer les suites extraites $(A^{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(A^{2p+1})_{p\geqslant 0}$).

Théorème 24

Soit $f : E \to F$. On suppose que f est continue sur E.

- Si A est un ouvert de F alors $f^{-1}(A) = \{x \in E,\ f(x) \in A\}$ est un ouvert de E.
- Si A est un fermé de F alors $f^{-1}(A) = \{x \in E,\ f(x) \in A\}$ est un fermé de E.

En particulier, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E alors :

- l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) > 0\}$ est un ouvert,
- les ensembles $\{x \in E,\ f(x) = 0\}$ et $\{x \in E,\ f(x) \geqslant 0\}$ sont des fermés.

Exemple 10 :

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
   Montrer que $]a, +\infty[$ et $]a, b[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Montrer que $]-\infty, b]$ et $[a, b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xe^y \leqslant x + 3yx^5 \leqslant 2y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un vecteur X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dit positif lorsque toutes ses composantes x_i sont positives ou nulles. On note alors $X \geqslant 0$.
   Montrer que $E = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geqslant 0\}$ est un fermé de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Théorème des bornes atteintes

Théorème 25

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$.
Si f est une fonction continue sur A et si A est une partie non vide, fermée et bornée de E avec E de dimension finie alors f est bornée et atteint ses bornes c'est-à-dire :

$$\exists (a, b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b).$$

C'est une généralisation du théorème connu pour les fonctions continues sur un segment (*théorème des bornes* ou *théorème de Weierstrass*).
Notons que l'on a dans ce cas $f(a) = \min\{f(x), x \in A\}$ et $f(b) = \max\{f(x), x \in A\}$. On pensera notamment à utiliser ce résultat lorsqu'il faut justifier l'existence d'un minimum ou d'un maximum (ou même d'une borne inférieure ou d'une borne supérieure).

Exemple 11 : Norme subordonnée
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On pose $\|f\| = \mathrm{Sup}\{\|f(x)\|_F,\ x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1\}$.
Montrer que $\|f\|$ est bien définie et qu'il existe $x_0 \in E$ unitaire tel que $\|f\| = \|f(x_0)\|_F$.
On peut montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E, F)$.

III. Limite en un point d'une application entre espaces vectoriels normés

A. Définition

Définition 26

Soit $f : A \subset E \to F$. Soit a un point adhérent à A. Soit $\ell \in F$.
On dit que f *admet pour limite* ℓ *au point* a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leqslant \eta, \text{ on a } \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

- Si les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie alors l'existence et la valeur de la limite ne dépendent pas des normes choisies.
- *Cas particulier $a \in A$:* Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors nécessairement, $\ell = f(a)$.
  Cela correspond à la notion de continuité de f en a (étudiée dans le paragraphe I.)
- Noter l'équivalence : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to a} \|f(x) - \ell\|_F = 0$.
- Pour tout $a \in E$, on a $\lim\limits_{x \to a} \|x - a\|_E = 0$.

B. Propriétés

Proposition 27 (*Théorème d'encadrement*)

Soit A une partie de E et a un point adhérent à A. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit f, g et h trois applications de A dans $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et f et h ont pour limite ℓ au point a.
Alors g a pour limite ℓ au point a.

Exemple 12 : On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Montrer que $\lim\limits_{x \to v} \langle u, x \rangle = \langle u, v \rangle$.

Théorème 28 (*Caractérisation séquentielle*)

Soit $f : A \subset E \to F$. Soit a un point adhérent à A.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

(ii) pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$

- Si l'on trouve une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ mais $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ alors f n'a pas pour limite ℓ au point a.
- Si l'on trouve deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$ mais $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\big(f(v_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes alors f n'a pas de limite au point a.

Application à l'étude de limites / de la continuité des fonctions de plusieurs variables :

Exemple 13 : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et } g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Étudier la continuité des fonctions f et g.

Exemple 14 : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ et $\psi(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
Étudier la limite de φ et ψ au point $(0,0)$.

Proposition 29 (*Opérations algébriques sur les limites*)

Soit A une partie de E et a un point adhérent à A.

- Soit $f : A \to F$ et $g : A \to F$.
  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lim\limits_{x\to a}\big(\lambda f(x) + g(x)\big) = \lambda\ell_1 + \ell_2$.
- Soit $f : A \to \mathbb{K}$ et $g : A \to F$.
  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lambda\ell$.

Proposition 30 (*Composition*)

Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : f(A) \to G$.
Soit a un point adhérent à A.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors b est un point adhérent à $f(A)$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

C. Cas où F est de dimension finie

Proposition 31 (*Fonctions coordonnées*)

Soit $f : A \subset E \to F$ et a un point adhérent à A.
On suppose que F est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, on note $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$ le vecteur-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}$.
La fonction f admet une limite en a si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ ont une limite en a.
Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p}\Big(\lim\limits_{x\to a} f_k(x)\Big)e_k$.

Exemple 15 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$.
Étudier la limite de f en 0.

D. Extension de la notion de limite

Définition 32

- Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à A.
  On dit que f *admet pour limite* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*) au point* a lorsque :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leqslant \eta, \text{ on a } f(x) \geqslant M$$
$$(\text{resp. } \forall M < 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leqslant \eta, \text{ on a } f(x) \leqslant M)$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$).
- Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to F$ avec A non majorée (respectivement non minorée). Soit $\ell \in F$.
  On dit que f *admet pour limite* ℓ *en* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*)* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } x \geqslant M, \text{ on a } \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$
$$(\text{resp. } \forall \varepsilon > 0,\ \exists M < 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } x \leqslant M, \text{ on a } \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon)$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

Les opérations sur les limites, la caractérisation séquentielle et le cas où F est de dimension finie s'adaptent naturellement à ces situations.

Noter la différence entre $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \ell$ (limite de suite) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (limite de fonction).
Si on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \ell$ (caractérisation séquentielle, sens composition) mais la réciproque n'est pas vraie en général.
Par contre, si l'on sait que f admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ (par exemple parce que c'est une fonction monotone au voisinage de $+\infty$) et qu'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \ell$ alors on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.