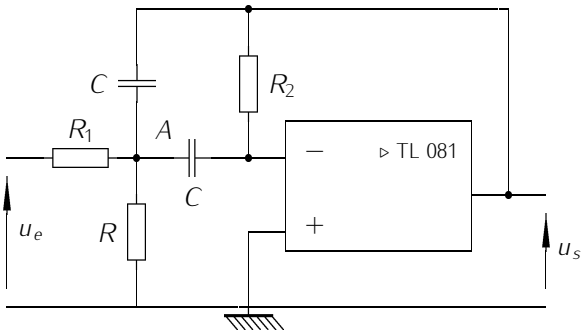
Conseils :

- Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

Filtre à structure de Rauch

On considère le filtre à structure de Rauch ci-dessous en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω. L'ALI est supposé idéal.



Q1 1. Prévoir à l'aide de schémas équivalents la nature probable du filtre. Justifier précisément.

Q2 2. Montrer que le potentiel au point A est donné par

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{u}_e}{R_1} + jC\omega\underline{u}_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega}$$

Q3 3. Montrer que l'on a également

$$\underline{V}_A = -\frac{\underline{u}_s}{jR_2C\omega}$$

4. L'élimination de $\underline{V}_A$ entre ces deux équations permets d'exprimer la fonction de transfert du filtre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad H_0 = \frac{R_2}{2R_1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1}{R_2}\frac{R+R_1}{RR_1}} \qquad Q = \frac{1}{2}\sqrt{R_2\frac{R+R_1}{RR_1}}$$

Vous devez l'admettre et ne pas perdre de temps à le remontrer inutilement.
Le diagramme de Bode en gain du filtre est donné figure ??.

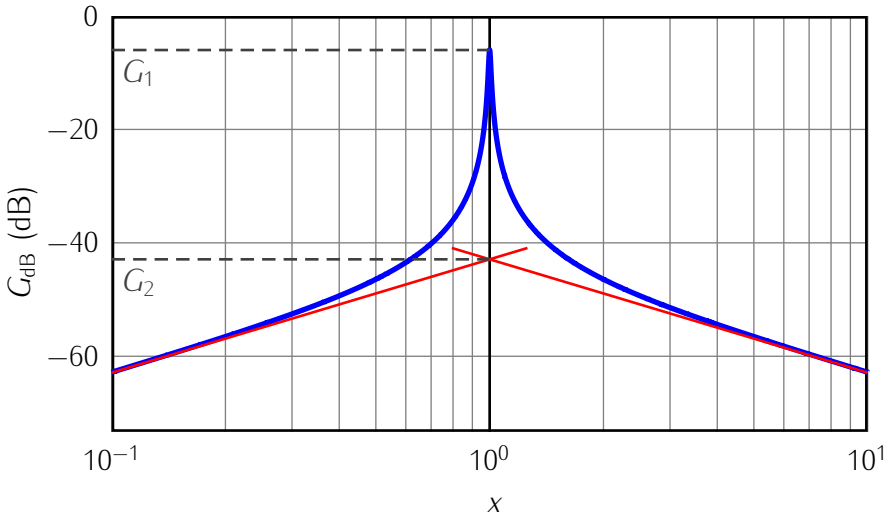


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en gain du filtre à strucutre de Rauch.

Q4 (a) Mesurer la pente des asymptotes sur le diagramme en expliquant votre mesure.

Q5 (b) Déterminer la pente à l'aide de l'étude de la fonction de transfert. Est-ce cohérent avec la question précédente ?

Q6 (c) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase en déterminant sa valeur en $x = 1$ et dans les limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$.

(d) Déterminer les valeurs de G_1 et G_2 définis sur le diagramme de Bode à partir de la fonction
Q7 de transfert en fonction de H_0, Q, ω_0.

5. Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ? de dérivateur ? Si oui, pour quelle bande de fréquence ?
Q8 Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage pour réaliser ces fonctions ?

6. On étudie le signal de sortie $s_1(t)$ lorsque l'on applique en entrée du filtre le signal

$$e_1(t) = E_0 + E_{1m}\cos(\omega_1 t) \qquad \text{avec} \qquad \omega_1 = \omega_0$$

Q9 Déterminer l'expression du signal de sortie $s_1(t)$.

7. On applique maintenant un signal créneau $e_2(t)$ de pulsation $\omega_2 = \omega_0/3$ et d'amplitude $E_{2m} = 1\,\text{V}$, voir figure ??. Ce signal est décomposable en série de Fourier par

$$e_2(t) = \frac{4}{\pi}E_{2m}\left[\sin(\omega_2 t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega_2 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_2 t) - \frac{1}{7}\sin(7\omega_2 t) + \dots\right]$$

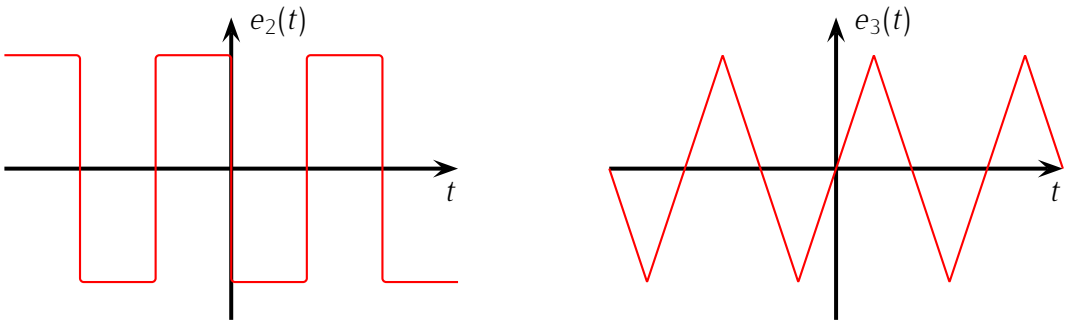


FIGURE 2 – Chronogramme des signaux d'entrée e_2 et e_3.

Q10 (a) Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $e_2(t)$. Préciser les valeurs numériques des pulsations des trois premiers pics d'amplitudes non nulles.

Q11 (b) En utilisant le diagramme de Bode en gain, figure ??, calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie s_2.

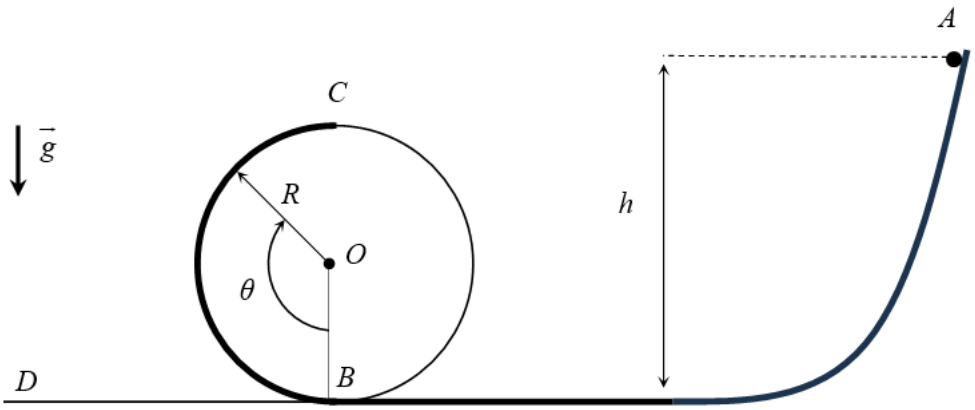
Q12 (c) En déduire l'expression approchée du signal de sortie $s_2(t)$. Peut-on qualifier ce montage de « tripleur de fréquence » ?

Q13 8. Quelles seraient approximativement l'allure et les caractéristiques du signal de sortie $s_3(t)$ si le signal d'entrée est triangulaire de pulsation $\omega_3 = \omega_0$ et d'amplitude $E_{3m} = 1\,\text{V}$, voir figure ?? ? Reproduire le signal d'entrée et le signal de sortie sur la même figure. La décomposition en série de Fourier de ce signal s'écrit

$$e_3(t) = \frac{4}{\pi^2} E_{3m} \left[\sin(\omega_3 t) + \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_3 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_3 t) + \frac{1}{7^2} \sin(7\omega_3 t) + \dots \right]$$

Un looping surhumain

Un looping vertical est une figure classique des manèges à sensations dans laquelle les wagons et les visiteurs à l'intérieur suivent un parcours avec inversion. Pour être réalisé, le mouvement nécessite une vitesse d'entrée suffisante dans la boucle, acquise auparavant lors d'une descente le plus souvent vertigineuse. On se pose la question de savoir s'il est humainement possible de réaliser un looping en courant ? Dans tout le problème, le système d'étude est un point matériel se déplaçant sans frottement. On lâche dans un premier temps une bille de masse m d'une hauteur h sans vitesse initiale sur un circuit comportant une boucle circulaire de rayon R (le fameux looping !).



1. Quelle doit être la vitesse minimale de la bille au point C pour ne pas tomber au cours du Q14 looping ? En déduire la hauteur h minimale de laquelle il faut lâcher la bille.

   On propose à un ou une athlète de 70 kg de courir à pleine vitesse sur une piste horizontale afin de parcourir un looping circulaire de $2R' = 3{,}0$ m de diamètre. On assimile l'athlète à un point matériel situé en son centre de masse G et l'on suppose que la personne est en permanence perpendiculaire au sol au contact de ses pieds. On note $d = 1{,}0$ m la distance entre G et le sol. On fait l'hypothèse qu'une fois dans le looping, l'athlète court sans fournir d'effort, en utilisant uniquement son inertie et la vitesse acquise lors de sa course d'élan.

Q15 2. Que vaut le rayon R de la trajectoire de G lorsque l'athlète réalise le looping ?

3. Calculer la vitesse minimale que l'athlète doit atteindre à l'entrée du looping pour réussir la figure. Commenter sachant qu'une personne bien entraînée peut courir à une vitesse de 20 km/h et que

le record du monde de vitesse en course à pied est de 44,7 km/h (détenu par le jamaïcain Usain
Q16 Bolt depuis 2009). L'entraînement de musculation de l'athlète lui permet maintenant de soulever des haltères de 100 kg posées sur ses épaules à la seule force de ses jambes. Au-delà, cela lui est impossible.

4. Evaluer le poids apparent minimal de l'athlète à son entrée dans le looping, défini comme l'opposé
Q17 de la réaction normale de la piste qui s'exerce sur lui. D'après ce résultat, quelle conclusion déduit-on sur la faisabilité d'effectuer un looping en courant ? Le cascadeur britannique Damien Walters est la première personne au monde à avoir fait un looping en courant. La vidéo de cet exploit, réalisé en 2014, est facilement visible sur le web. Pour justifier la faisabilité de cet exploit, on modifie le modèle en supposant que l'athlète réussit à maintenir une vitesse constante tout le long de son parcours dans le looping.

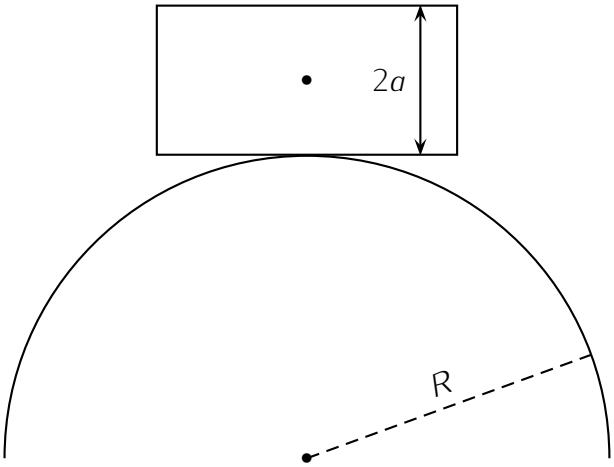
Q18 5. Evaluer la nouvelle valeur du poids apparent minimal à l'entrée du looping. Qu'en est-il à la sortie ? Pourquoi l'athlète ne doit-il pas arriver trop vite sur le looping ?

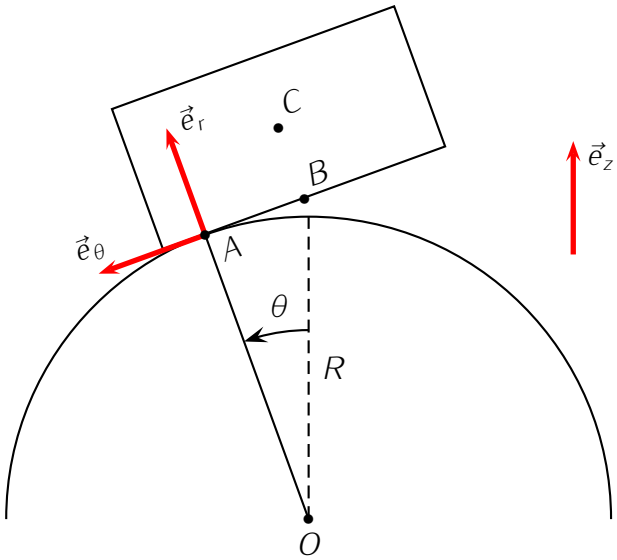
Q19 6. Quelle(s) amélioration(s) pourrait-on faire à notre modèle ?

Verre en équilibre

Harassés par leur dure journée, Dimitri et Baptiste s'affalent dans un canapé avec un verre. Nos deux compères font les observations suivantes : Dimitri arrive à maintenir son petit verre de jus d'orange en équilibre sur son ventre, alors que pour Baptiste, il impossible de maintenir sa grande pinte de bière en équilibre.
Le défi est de comprendre ces observations et de donner un conseil à Baptiste pour qu'il puisse faire tenir sa bière.

On modélise un verre par un parallélépipède rectangle (indéformable) homogène de hauteur $2a$ et le ventre de nos deux athlètes par un demi-cylindre de rayon R. On se ramène alors au problème décrit ci-dessous.





On cherche à quelle condition (sur a et R) le parallélépipède est en équilibre stable sur le demi-cylindre. On supposera que le parallélépipède ne glisse pas sur le cylindre.

Résolution du défi

1. Montrer que $\vec{OC} = R\vec{e}_r - R\theta\vec{e}_\theta + a\vec{e}_r$. On pourra remarquer qu'en l'absence de glissement, la
Q20 distance AB correspond à la longueur d'un certain arc de cercle.

Q21 2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du parallélépipède.

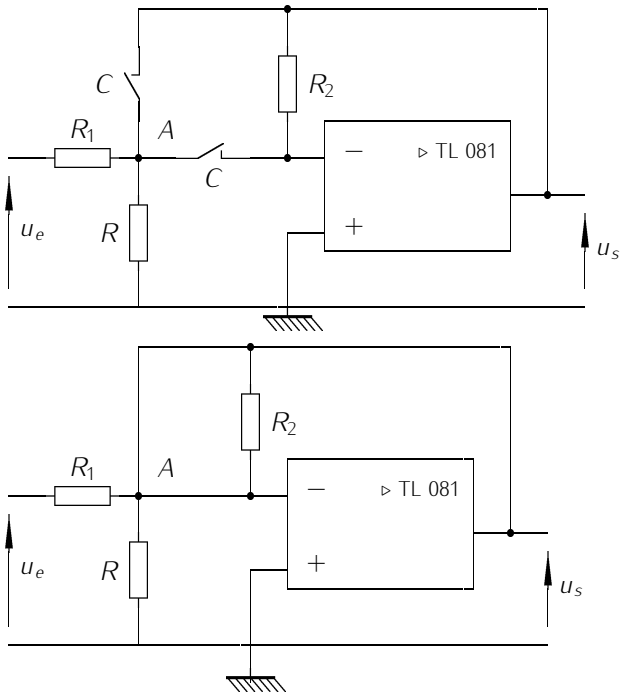
Q22 3. Montrer que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre.

Q23 4. À quelle condition la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable ?

Q24 5. Donner un conseil avisé à Baptiste.

Filtre de Rauch

1. Ci-dessous le schéma équivalent à basse fréquence et haute fréquence :



On peut d'abord remarquer la présence d'une rétroaction négative sur l'ALI et on peut donc supposer un fonctionnement linéaire. Ainsi $V_+ = V_-$. Or l'entrée non inverseuse est reliée à la masse donc $\boxed{V_+ = V_- = 0}$.

➢ **Basses fréquences :** le courant traversant R_2 est nul donc $\boxed{U_s = 0}$.

➢ **Hautes fréquences :** en suivant le fil entre la sortie et la masse on trouve directement $\boxed{U_s = 0}$.

Q1 La nature probable est donc passe-bande

2. La loi des nœuds en terme de potentiels appliquée au point A donne :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{u_e}{R_1} + jC\omega\underline{u}_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega}$$

La loi des nœuds en terme de potentiels appliquée à la borne inverseuse donne :

$$\underline{V}_- = 0 = \frac{\underline{V}_A jC\omega + \frac{u_s}{R_2}}{jC\omega + \frac{1}{R_2}}$$

Ainsi :

$$\underline{V}_A = -\frac{\underline{u}_s}{jR_2C\omega}$$

L'élimination de $\underline{V}_A$ entre ces deux équations permets d'exprimer la fonction de transfert du filtre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad H_0 = \frac{R_2}{2R_1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1}{R_2}\frac{R + R_1}{RR_1}} \qquad Q = \frac{1}{2}\sqrt{R_2\frac{R + R_1}{RR_1}}$$

Q2 3. (a) On peut voir sur le diagramme que l'asymptote aux BF monte de 20 dB lorsque l'on passe de $x = 10^{-1}$ à 10^{0}, soit une pente de +20 dB/dec ; de même en HF, on descend de 20 dB par décade.

(b)

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \Rightarrow G_{\text{dB}} = 20\log H_0 - 20\log Q + 20log(x) - 20\log\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

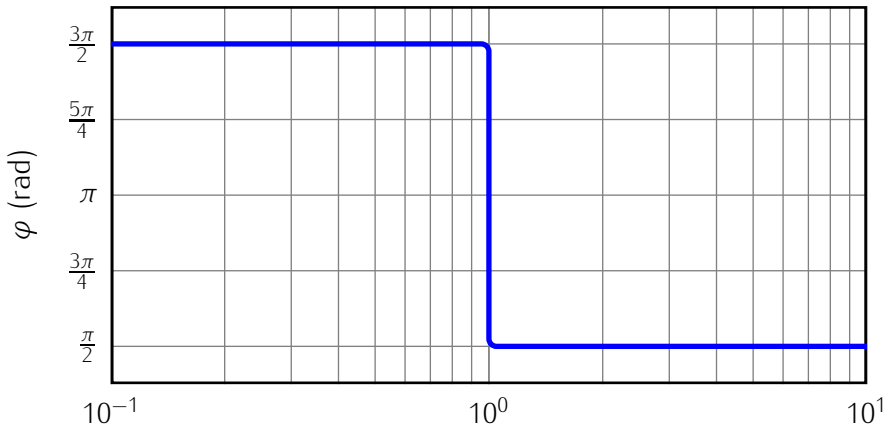
➢ **Basses fréquences :** $x \ll 1$ d'où on peut négliger x^2 par rapport à un dans les sommes : $G_{\text{dB}} \simeq 20\log H_0 - 20\log Q + 20\log(x) - 20\log(\sqrt{1}) = \boxed{20\log H_0 - 20\log Q + 20\log(x)}$, on a donc bien une pente de +20 dB/dec : quand x est multiplié par 10, on monte de
Q3 20 dB.

➢ **Hautes fréquences :** $x \gg 1$ d'où on peut négliger 1 par rapport à x^2 et x^2 par rapport à x^4. $G_{\text{dB}} \simeq 20\log H_0 - 20\log Q + 20\log(x) - 20\log\sqrt{x^4} = \boxed{20\log H_0 - 20\log Q + 20\log(x/x^2)} = \boxed{20\log H_0 - 20\log Q - 20\log x}$, on a donc bien une pente de -20 dB/dec : quand x est multiplié par 10, on descend de 20 dB.

(c) $\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ soit en BF $\underline{H}(jx) \simeq -jH_0\frac{x}{Q}$ et en HF $\underline{H}(jx) \simeq \frac{j\frac{x}{Q}}{x^2} = j\frac{H_0}{Qx}$

On en déduit la phase en basse fréquence
$\varphi_{BF}(x) = \frac{3\pi}{2}$
et en haute fréquence
Q4 $\varphi_{HF}(x) = \frac{\pi}{2}$
(car $H_0 > 0$).

De plus en $x = 1$, $\underline{H} = -H_0$, d'où $\varphi(1) = \pi$.



(d) G_1 sur le schéma correspond à la valeur au gain en $x = 1$, soit $G_1 = 20\log H_0$. Soit numéri-
Q5 quement $G_1 = -6$ dB.

G_2 correspond à l'intersection entre les deux assymptotes en $x = 1$ soit $G_2 = 20\log(H_0/Q)$ soit numériquement $G_2 = -43$ dB.

4. À basse fréquence, $\underline{H}(jx) \simeq -jH_0\frac{x}{Q}$: on a une multiplication par $j\omega$, le comportement du montage est celui d'un $\boxed{\text{dérivateur pour } \omega \ll \omega_0}$.

À haute fréquence $\underline{H}(jx) \simeq -\frac{H_0/Q}{jx}$: on a une division par $j\omega$, le comportement du montage est
Q6 celui d'un $\boxed{\text{intégrateur pour } \omega \gg \omega_0}$.

Toutefois, le filtre atténue fortement le signal compte tenu de son facteur de qualité élevé.

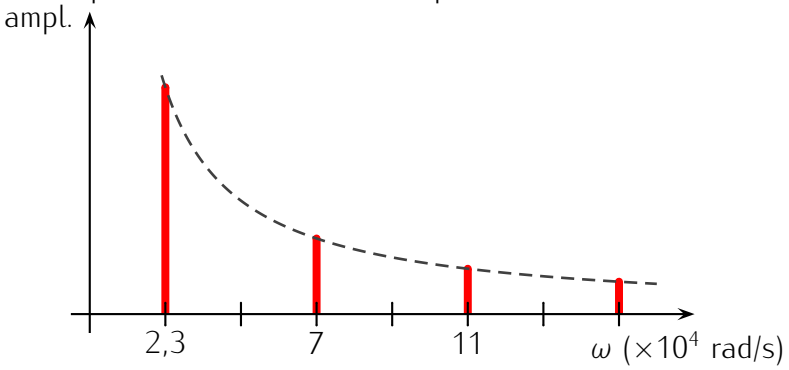
5. Le signal d'entrée présente deux composantes spectrales : une à une fréquence nulle d'amplitude E_0 et une à une fréquence ω_0 d'amplitude E_{1m}.

Compte tenu de la fonctin de transfert du filtre, la composante de fréquence nulle est multipliée par 0 ($\lim_{x\to 0} G(x) = 0$) et celle de fréquence ω_0 est multipliée par H_0 (pas de déphasage puisque
Q7 la fonction de transfert est réelle à ω_0). On en déduit $\boxed{s_1(t) = 0 \times E_0 + H_0 E_{1m}\cos(\omega_0 t + 0)}$

On rappelle que si c_n et φ_n sont les amplitudes et les phases du signal d'entrées correspondant aux fréquences f_n, alors

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(f_n)| c_n \cos\left(2\pi f_n t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(f_n))\right)$$

Q8 6. (a) L'allure du spectre est représentée ci-dessous. Les pics décroissent en $1/f$.



Q9 (b) En utilisant le diagramme de Bode en gain, figure **??** , calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie s_2.

- Le terme de pulsation ω_2 correspond à $x_2 = 1/3$. D'après le diagramme de bode son amplitude est atténuée par le filtre d'environ 50 dB. Cela équivaut à une amplitude multipliée par $10^{-50/20} = 3 \cdot 10^{-3}$;
- le terme de pulsation $3\omega_2 = \omega_0$ voit comme précédemment son amplitude multipliée par $1/2$;
- Le terme de pulsation $5\omega_2$ correspond à $x_2 = 5/3 \simeq 1{,}7$. D'après le diagramme de bode son amplitude est atténuée par le filtre d'environ 50 dB. Cela équivaut à une amplitude multipliée par $10^{-50/20} = 3 \cdot 10^{-3}$;

Les amplitudes sont donc :

- Pour le terme de pulsation ω_2 : $\frac{4}{\pi} E_{2,m} \times 3 \cdot 10^{-3} = 4{,}03 \times 10^{-3}\,\text{V}$
- Pour le terme de pulsation $3\omega_2$: $\frac{4}{\pi} E_{2,m} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 2{,}12 \times 10^{-1}\,\text{V}$
- Pour le terme de pulsation $5\omega_2$: $\frac{4}{\pi} E_{2,m} \times \frac{1}{5} \times 3 \cdot 10^{-3} = 8{,}05 \times 10^{-4}\,\text{V}$

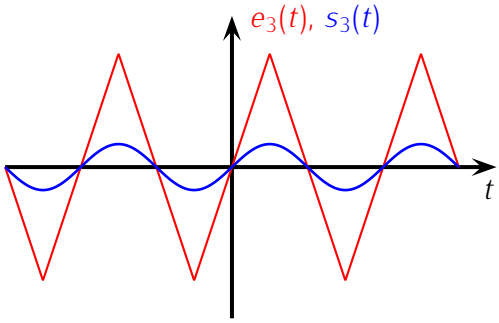
Q10 (c) Le terme de pulsation $3\omega_2$ domine donc nettement les autres. L'expression approchée du signal de sortie $s_2(t)$ est donc $-\frac{2}{3\pi} E_{2,m} \sin(3\omega_2 t)$ (il n'y a pas de déphasage à ω_0 comme nous l'avons vu avant).

Dans le cas présent, la pulsation du signal de sortie $3\omega_2$ est égale au triple de celle du signal d'entrée, ce qui explique la dénomination proposée de « tripleur de fréquence ». Néanmoins, cela ne vaut que pour un signal d'entrée de pulsation $\omega_0/3$ et contenant une harmonique de rang 3 non nul : le triplage de fréquence ne vaut que dans certains cas très précis, et est loin d'être propre à tout signal. En résumé, appeler ce montage « tripleur de fréquence » serait impropre car trop particulier.

7. Le fondamental est à la pulsation centrale du filtre, alors que la première harmonique non-nulle (harmonique de rang 3) est à une pulsation pour laquelle l'atténuation est supérieure à 50 dB. On peut donc raisonnablement négliger la contribution au signal de sortie de toutes les harmoniques de rang $n \geq 3$, ce qui permet d'écrire

$$s_3(t) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\pi^2} E_{3,m} \sin(\omega_3 t) = \frac{2}{\pi^2} E_{3,m} \sin(\omega_3 t)$$

toujours sans déphasage. Le signal de sortie est donc un signal sinusoïdal de pulsation ω_3, sans
Q11 phase initiale et d'amplitude $\frac{2}{\pi^2} E_{3,m} \simeq 200\,\text{mV}$. Les signaux sont représentés ci-dessous.



Un looping surhumain

1. Lorsque la bille est dans la boucle circulaire, elle est soumise à son poids et à la réaction normale de la piste. On applique le principe fondamental de la dynamique à la bille :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

En coordonnées polaires, on a :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$$

Ainsi que :

$$m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$$

et

$$\vec{N} = -N\vec{e}_r$$

La projection sur $\vec{e}_\theta$ fournit l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

(puisque pour un mouvement circulaire on a : $\vec{v} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$). On reconnaît l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur R.
On utilise ici la projection sur $\vec{e}_r$ pour exprimer la réaction normale :

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

Pour ne pas tomber au cours du looping, la bille doit rester en contact avec la piste et donc subir une réaction normale non nulle, c'est-à-dire : $N > 0$. La valeur minimale de N est obtenue en haut de la boucle, au point C où la vitesse est minimale et $\theta = \pi$, ce qui conduit à la condition :

$$-mg + m\frac{v_C^2}{R} > 0$$

c'est-à-dire :

$$v_C > \sqrt{gR}$$

En l'absence de frottement, on utilise alors la conservation de l'énergie mécanique entre le point A et le point C :

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2$$

ce qui conduit à :

$$h > \frac{5R}{2}$$

2. La trajectoire de G est de rayon, $R = R' - d$. Ici, $R' = 1.5\,\text{m}$ et $d = 1.0\,\text{m}$, d'où $R = 0.5\,\text{m}$.
3. On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre B et C :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgR$$

ce qui fournit :

$$v_B > \sqrt{5gR}$$

Numériquement, pour $R = 0.5\,\text{m}$, on obtient :

$$v_B = 5.0\,\text{m/s}$$

soit environ 18 km/h. Cette contrainte de vitesse ne semble donc pas être une difficulté en pratique.

4. La réaction normale qui s'exerce sur l'athlète à son entrée dans le looping en B (c'est-à-dire pour $\theta = 0$) s'écrit :

$$N_B = mg + m\frac{v_B^2}{R} = mg^*$$

et correspond au «poids apparent» recherché. On remarquera que :

$$g^* = g + \frac{v_B^2}{R} > 6g$$

si bien que $mg^* > 6mg$. À son entrée dans la boucle, tout se passe comme si l'athlète pesait au minimum 6 fois son propre poids (on dit qu'il ressent une accélération de $6g$), c'est-à-dire comme s'il avait une masse de 420 kg. ce résultat étant valable quelle que soit la taille du looping circulaire ! Cette masse est bien supérieure à ce que l'athlète peut supporter avec ses jambes (100 kg + 70 kg), il risque donc de s'effondrer à l'entrée du looping ! Et selon le modèle utilisé jusqu'à maintenant, il semble humainement impossible de réaliser un looping en courant

5. Avec $N_B = mg + m\frac{v_B^2}{R}$ et $v_B = v_C$, on obtient maintenant $mg^* > 2mg$, à l'entrée comme à la sortie du looping, soit 140 kg, ce qui est inférieur à ce que les jambes de l'athlète peuvent supporter. Le franchissement d'un looping en courant est en effet réalisable, mais il s'agit bel et bien d'une prouesse physique !

   Par contre, une vitesse de franchissement trop importante induirait un poids apparent trop élevé. Par exemple, si Usain Bolt arrivait à 44.7 km/h à l'entrée du looping, il ressentirait une accélération $g^* = g + \frac{v_B^2}{R} = 318\,\text{m/s}^2$, soit près de $32g$ et ses jambes devraient soutenir l'équivalent de plus de 2 tonnes !

À noter que l'énergie mécanique de l'athlète ne se conserve pas du fait des frottements de ses pieds sur le sol pour maintenir sa vitesse.

6. On peut souligner plusieurs défauts majeurs au modèle précédent. En pratique, l'athlète peut se pencher en arrière juste avant d'entamer le looping. Cela lui permet d'augmenter le rayon de courbure de la trajectoire de son centre de masse et ainsi limiter son poids apparent au début du looping. Il peut également le faire juste avant la fin du looping en rapprochant son centre de masse près du sol en pliant ses jambes. Enfin, pour une description plus précise, l'athlète devrait être assimilé à un système déformable plutôt qu'à un point matériel.

   A noter que dans les manèges, les loopings sont souvent réalisés avec des courbes que l'on appelle des clothoïdes, dont le rayon de courbure est grand à l'entrée au moment où la vitesse est la plus importante (pour minimiser l'accélération) et faible en haut du looping (pour garder une force centrifuge suffisante et maintenir le wagon sur les rails). Les clothoïdes sont également utilisées pour dessiner les sorties d'autoroute : le conducteur peut alors prendre la sortie à vitesse constante en tournant le volant de plus en plus ; l'accélération subie augmente progressivement à mesure que le rayon de courbure diminue, ce qui est plus agréable pour les passagers qu'une accélération brutale.

Verre en équilibre

1. Le parallélépipède est soumis à son poids qui est une force conservative ($E_p = mgz$) et la réaction
Q12 du cylindre qui ne travaille pas, car il n'y a pas de glissement d'un solide sur l'autre.

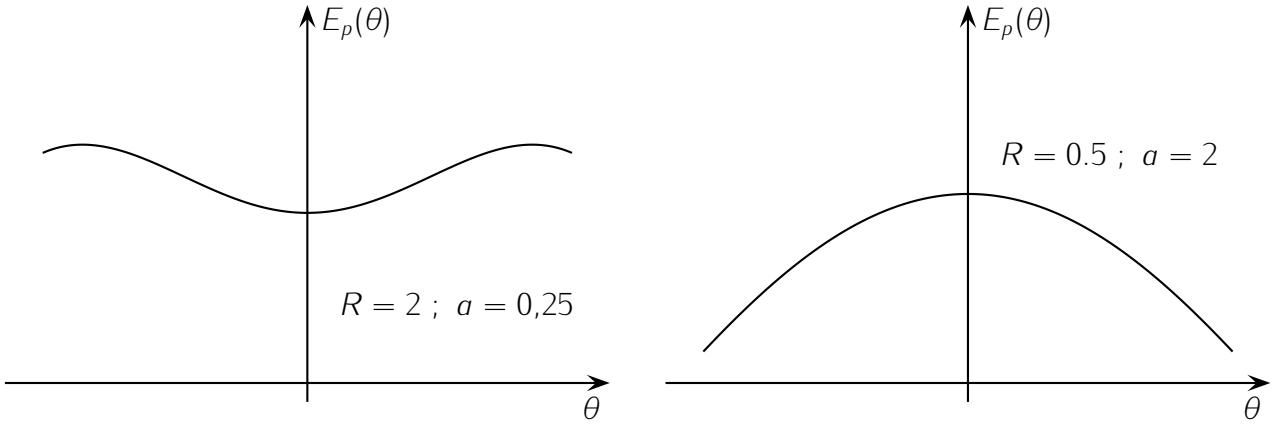
2. Grâce à la relation de Chasle : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = R\vec{e}_r - R\theta\vec{e}_\theta + a\vec{e}_r$. En effet la rotation
Q13 sans glissement implique $AB = R\theta$.

3. L'energie potentielle de pesanteur pour le cube est : $E_p(\theta) = mgz_C = mg\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e}_z$. Or $\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e}_z =$
Q14 $R\cos\theta + R\theta\sin\theta + a\cos\theta$. Enfin : $E_p(\theta) = mg(R\cos\theta + R\theta\sin\theta + a\cos\theta)$.

Q15 4. $\frac{1}{mg}\frac{dE_p}{d\theta} = -(R+a)\sin\theta + R\sin\theta + R\theta\cos\theta = -a\sin\theta + R\theta\cos\theta$. On a donc bien une position d'équilibre en $\theta = 0$ car $\frac{1}{mg}\frac{dE_p}{d\theta}(\theta = 0) = 0$.

Q16 5. Pour étudier la stabilité on regarde la dérivée 2nd évaluée en $\theta = 0$: $\frac{1}{mg}\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -a\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\sin\theta$
$\frac{1}{mg}\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta = 0) = R - a$. D'où $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si $R > a$ et instable sinon.

Ci-dessous les profils d'énergie dans les 2 cas au voisinage de 0.



6. On peut donner deux conseils à Baptiste : arrêter la bière ou alors augmenter le rayon de courbure
Q17 de son ventre et donc avoir un ventre plat : AU RÉGIME !.