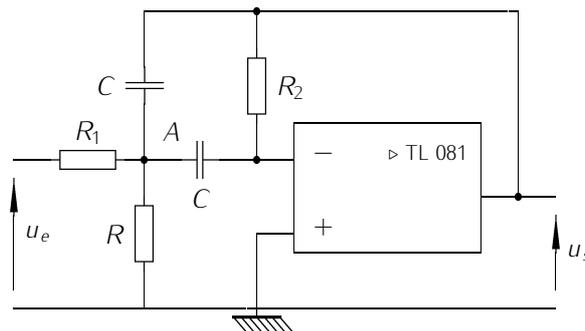


Conseils :

- Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

FILTRE À STRUCTURE DE RAUCH

On considère le filtre à structure de Rauch ci-dessous en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω . L'ALI est supposé idéal.



Q1 1. Prévoir à l'aide de schémas équivalents la nature probable du filtre. Justifier précisément.

Q2 2. Montrer que le potentiel au point A est donné par

$$\underline{v}_A = \frac{\frac{u_e}{R_1} + jC\omega u_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega}$$

Q3 3. Montrer que l'on a également

$$\underline{v}_A = -\frac{u_s}{jR_2C\omega}$$

4. L'élimination de \underline{v}_A entre ces deux équations permet d'exprimer la fonction de transfert du filtre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad H_0 = \frac{R_2}{2R_1} \quad \omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{R_2} \frac{R + R_1}{RR_1}} \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{R_2 \frac{R + R_1}{RR_1}}$$

Vous devez l'admettre et ne pas perdre de temps à le remonter inutilement.

Le diagramme de Bode en gain du filtre est donné figure 1.

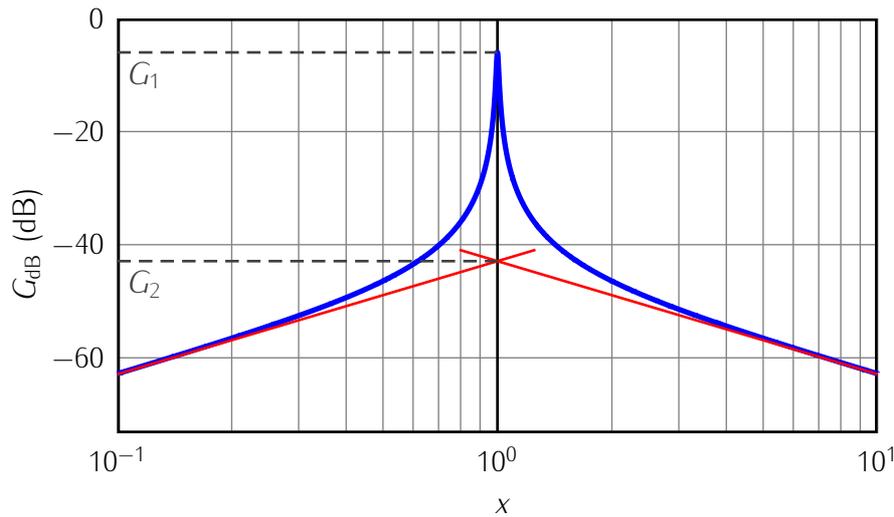


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en gain du filtre à structure de Rauch.

- Q4 (a) Mesurer la pente des asymptotes sur le diagramme en expliquant votre mesure.
 - Q5 (b) Déterminer la pente à l'aide de l'étude de la fonction de transfert. Est-ce cohérent avec la question précédente ?
 - Q6 (c) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase en déterminant sa valeur en $x = 1$ et dans les limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$.
 - Q7 (d) Déterminer les valeurs de G_1 et G_2 définis sur le diagramme de Bode à partir de la fonction de transfert en fonction de H_0, Q, ω_0 .
5. Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ? de dérivateur ? Si oui, pour quelle bande de fréquence ? Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage pour réaliser ces fonctions ?
6. On étudie le signal de sortie $s_1(t)$ lorsque l'on applique en entrée du filtre le signal

$$e_1(t) = E_0 + E_{1m} \cos(\omega_1 t) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \omega_0$$

- Q9 Déterminer l'expression du signal de sortie $s_1(t)$.
7. On applique maintenant un signal créneau $e_2(t)$ de pulsation $\omega_2 = \omega_0/3$ et d'amplitude $E_{2m} = 1 \text{ V}$, voir figure 2. Ce signal est décomposable en série de Fourier par

$$e_2(t) = \frac{4}{\pi} E_{2m} \left[\sin(\omega_2 t) - \frac{1}{3} \sin(3\omega_2 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_2 t) - \frac{1}{7} \sin(7\omega_2 t) + \dots \right]$$

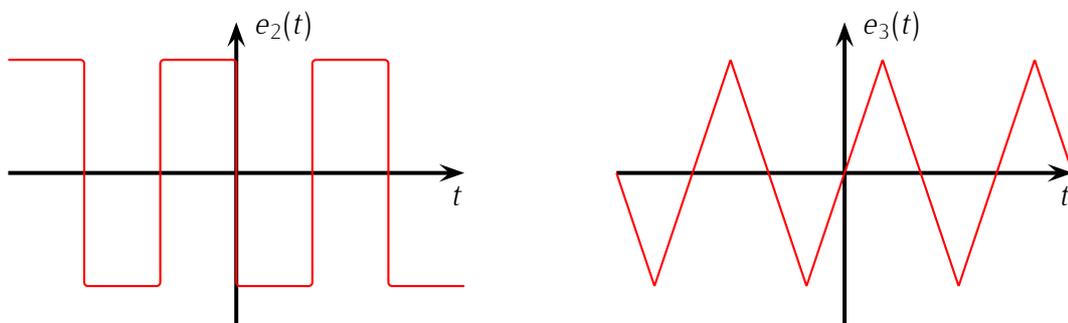


FIGURE 2 – Chronogramme des signaux d'entrée e_2 et e_3 .

- Q10 (a) Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $e_2(t)$. Préciser les valeurs numériques des pulsations des trois premiers pics d'amplitudes non nulles.

- Q11 (b) En utilisant le diagramme de Bode en gain, figure 1, calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie s_2 .
- Q12 (c) En déduire l'expression approchée du signal de sortie $s_2(t)$. Peut-on qualifier ce montage de « tripleur de fréquence » ?
- Q13 8. Quelles seraient approximativement l'allure et les caractéristiques du signal de sortie $s_3(t)$ si le signal d'entrée est triangulaire de pulsation $\omega_3 = \omega_0$ et d'amplitude $E_{3m} = 1\text{V}$, voir figure 2 ? Reproduire le signal d'entrée et le signal de sortie sur la même figure. La décomposition en série de Fourier de ce signal s'écrit

$$e_3(t) = \frac{4}{\pi^2} E_{3m} \left[\sin(\omega_3 t) + \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_3 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_3 t) + \frac{1}{7^2} \sin(7\omega_3 t) + \dots \right]$$

VIVE LES LOOPINGS !

Le petit Philippe a reçu un nouveau jeu de bille pour lequel il a souhaité construire un grand looping. Toutefois, il se dit qu'il a été un peu gourmand sur la taille du looping (rayon R trop grand) et se demande s'il parviendra à faire faire un tour à sa bille. Il compte sur vous pour l'aider à déterminer les dimensions optimales.

Pour l'étude, la bille sera assimilée à un point matériel de masse m . Elle est lancée sur un guide constitué d'une partie rectiligne horizontale et d'une partie circulaire de centre O , de rayon R située dans un plan vertical.

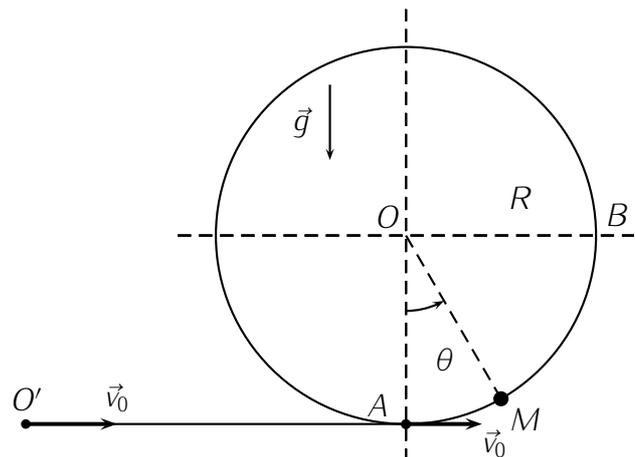
La jonction entre la droite et le bas du cercle se fait en un point A .

Une fois sur le guide circulaire, la bille se trouve en M , point repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

On suppose dans une première partie que la bille n'est soumise à aucun frottement.

On la lance avec un vecteur vitesse \vec{v}_0 à partir d'un point O' de la partie rectiligne en direction du point A . Pour amener la bille à cette vitesse \vec{v}_0 , Philippe veut utiliser un ressort de raideur k qu'il comprime, la bille atteignant la vitesse \vec{v}_0 lorsqu'elle quitte le contact du ressort.

Puisque l'on néglige l'influence des frottements, en particulier entre O' et A , alors le vecteur vitesse de la bille est aussi \vec{v}_0 en A . Ainsi en A , on notera de même v_0 la norme du vecteur vitesse : $\|\vec{v}_0\| = v_0$.



- Q14 1. (a) Énoncer le théorème de l'énergie mécanique (phrase et formule).
- Q15 (b) Quelle est la longueur d de compression du ressort nécessaire pour atteindre la vitesse \vec{v}_0 ?
- Q16 (c) Faire l'application numérique pour $k = 400\text{ N.m}^{-1}$, $\vec{v}_0 = 4\text{ m.s}^{-1}$ et $m = 10\text{ g}$.
- Q17 2. (a) Énoncer le théorème de l'énergie cinétique (phrase et formule).
- Q18 (b) Établir l'expression du travail du poids entre les positions A et M en fonction de θ et constantes. Vérifier son signe.
- Q19 (c) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la bille entre les positions A et M , en déduire l'expression de v en fonction de θ et des constantes.

3. Énoncer et appliquer le principe fondamental de la dynamique à la bille.

Q20

Montrer que la norme de la réaction normale du guide sur la bille peut s'écrire sous la forme :

$$R_N = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}$$

4. (*La suite est plus délicate*) Ici on étudie les différentes options pour la bille : soit faire un tour complet, soit faire demi-tour, soit décoller du guide.

Q21

(a) À quelle condition sur R_N la bille effectue-t-elle un tour complet ?

Q22

(b) En déduire une condition sur v_0 pour que la bille effectue un tour complet.

Q23

(c) Reformuler la condition précédente afin d'obtenir une condition sur R si v_0 est fixé. Faire l'application numérique.

Q24

(d) À quelle condition sur v_0 rebrousse-t-elle chemin ? Quel angle maximal θ_a atteint-elle ?

Q25

(e) À quelle condition sur v_0 la bille décolle-t-elle du guide ? Pour quel angle θ_d ?

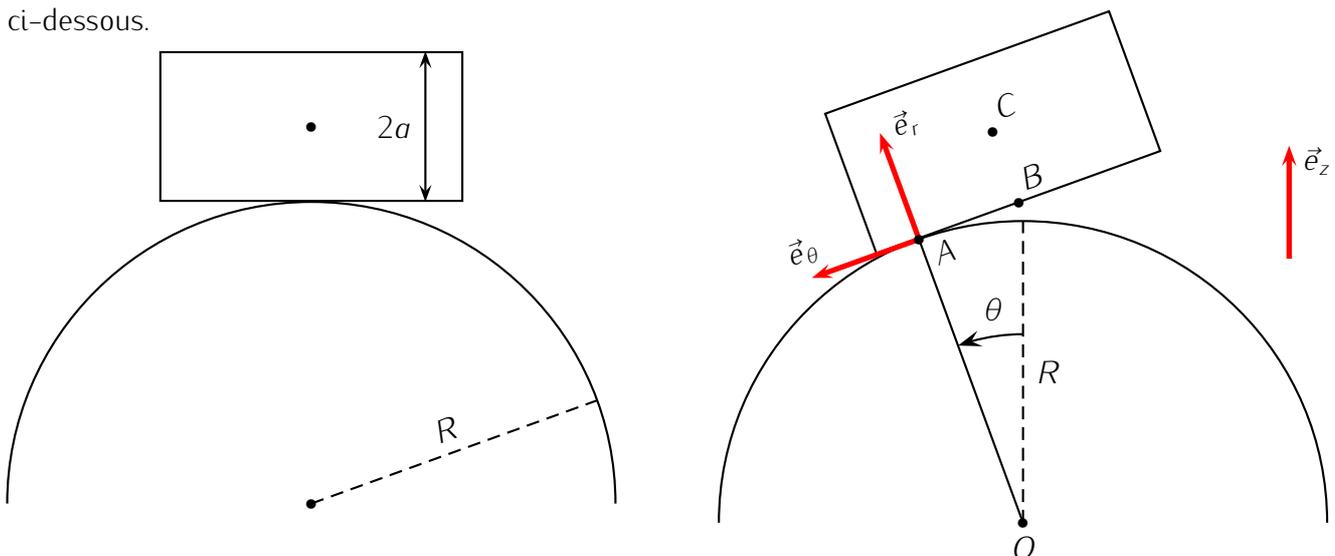
VERRE EN ÉQUILIBRE



Harassés par leur dure journée, Dimitri et Baptiste s'affalent dans un canapé avec un verre. Nos deux compères font les observations suivantes : Dimitri arrive à maintenir son petit verre de jus d'orange en équilibre sur son ventre, alors que pour Baptiste, il est impossible de maintenir sa grande pinte de bière en équilibre.

Le défi est de comprendre ces observations et de donner un conseil à Baptiste pour qu'il puisse faire tenir sa bière.

On modélise un verre par un parallélépipède rectangle (indéformable) homogène de hauteur $2a$ et le ventre de nos deux athlètes par un demi-cylindre de rayon R . On se ramène alors au problème décrit ci-dessous.



On cherche à quelle condition (sur a et R) le parallélépipède est en équilibre stable sur le demi-cylindre. On supposera que le parallélépipède ne glisse pas sur le cylindre.

Échauffement :

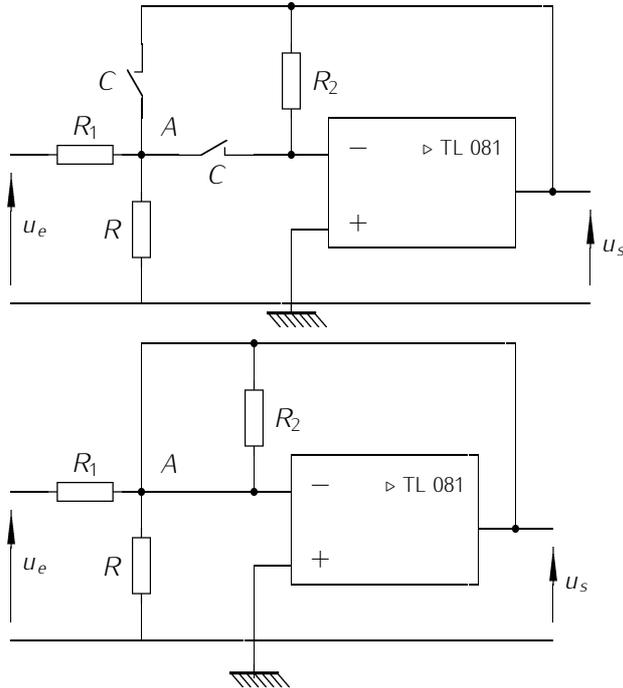
- Q26 1. Donner la définition du travail d'une force.
- Q27 2. Donner la définition d'une énergie potentielle.
- Q28 3. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.
- Q29 4. On considère un objet ponctuel dans un champ d'énergie potentielle $E_P(x)$. À quelle condition la position x_e est une position d'équilibre ? À quelle condition cet équilibre est stable ?

Résolution du défi

- Q30 1. Faire un inventaire des forces appliquées au parallélépipède en précisant si elles dérivent d'une énergie potentielle. On admet que la force de contact ne travaille pas.
- Q31 2. Montrer que $\vec{OC} = R\vec{e}_r - R\theta\vec{e}_\theta + a\vec{e}_r$. On pourra remarquer qu'en l'absence de glissement, la distance AB correspond à la longueur d'un certain arc de cercle.
- Q32 3. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du parallélépipède.
- Q33 4. Montrer que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre.
- Q34 5. À quelle condition la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable ?
- Q35 6. Donner un conseil avisé à Baptiste.

FILTRE DE RAUCH

1. Ci-dessous le schéma équivalent à basse fréquence et haute fréquence :



On peut d'abord remarquer la présence d'une rétroaction négative sur l'ALI et on peut donc supposer un fonctionnement linéaire. Ainsi $V_+ = V_-$. Or l'entrée non inverseuse est reliée à la masse donc $V_+ = V_- = 0$.

➤ **Basses fréquences** : le courant traversant R_2 est nul donc $U_s = 0$.

➤ **Hautes fréquences** : en suivant le fil entre la sortie et la masse on trouve directement $U_s = 0$.

Q36

La nature probable est donc passe-bande

2. La loi des nœuds en terme de potentiels appliquée au point A donne :

$$V_A = \frac{\frac{u_e}{R_1} + jC\omega u_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega}$$

3. la loi des nœuds en terme de potentiels appliquée à la borne inverseuse donne :

$$V_- = 0 = \frac{V_A jC\omega + \frac{u_s}{R_2}}{jC\omega + \frac{1}{R_2}}$$

Ainsi :

$$V_A = -\frac{u_s}{jR_2 C \omega}$$

Q37

4. (a) On peut voir sur le diagramme que l'asymptote aux BF monte de 20 dB lorsque l'on passe de $x = 10^{-1}$ à 10^0 , soit une pente de +20 dB/dec ; de même en HF, on descend de 20 dB par décade.

(b)

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x) - 20 \log \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

Q38

➤ **Basses fréquences** : $x \ll 1$ d'où on peut négliger x^2 par rapport à 1 dans les sommes : $G_{dB} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x) - 20 \log(\sqrt{1}) = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x)$, on a donc bien une pente de +20 dB/dec : quand x est multiplié par 10, on monte de 20 dB.

➤ **Hautes fréquences** : $x \gg 1$ d'où on peut négliger 1 par rapport à x^2 et x^2 par rapport à x^4 . $G_{dB} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x) - 20 \log \sqrt{x^4} = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x/x^2) = 20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log x$, on a donc bien une pente de -20 dB/dec : quand x est multiplié par 10, on descend de 20 dB.

(c) $\underline{H}(\omega) = -\frac{H_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ soit en BF $\underline{H}(jx) \simeq -jH_0\frac{x}{Q}$ et en HF $\underline{H}(jx) \simeq \frac{j\frac{H_0}{Q}}{x^2} = j\frac{H_0}{Qx}$

Q39

On en déduit la phase en basse fréquence

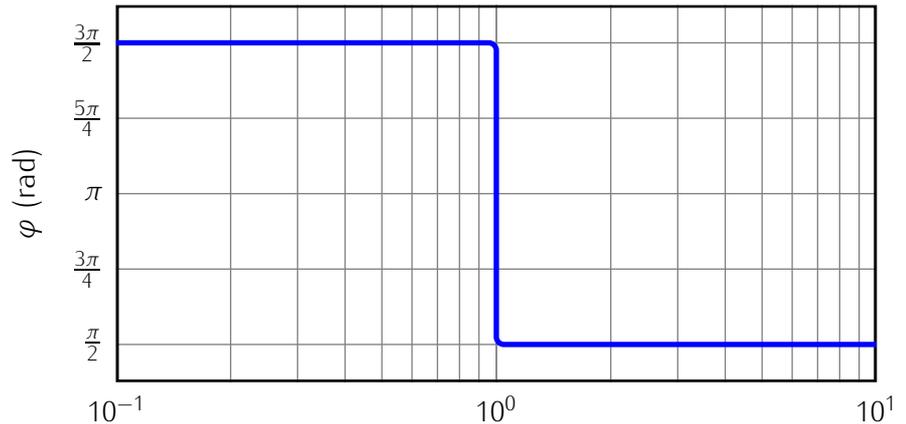
$$\varphi_{BF}(x) = \frac{3\pi}{2}$$

et en haute fréquence

$$\varphi_{HF}(x) = \frac{\pi}{2}$$

(car $H_0 > 0$).

De plus en $x = 1$, $\underline{H} = -H_0$, d'où $\varphi(1) = \pi$.



Q40

(d) G_1 sur le schéma correspond à la valeur au gain en $x = 1$, soit $G_1 = 20 \log H_0$. Soit numériquement $G_1 = -6$ dB.

G_2 correspond à l'intersection entre les deux asymptotes en $x = 1$ soit $G_2 = 20 \log(H_0/Q)$ soit numériquement $G_2 = -43$ dB.

5. À basse fréquence, $\underline{H}(jx) \simeq -jH_0\frac{x}{Q}$: on a une multiplication par $j\omega$, le comportement du montage est celui d'un **dérivateur pour $\omega \ll \omega_0$** .

À haute fréquence $\underline{H}(jx) \simeq -\frac{H_0/Q}{jx}$: on a une division par $j\omega$, le comportement du montage est celui d'un **intégrateur pour $\omega \gg \omega_0$** .

Q41

Toutefois, le filtre atténue fortement le signal compte tenu de son facteur de qualité élevé.

6. Le signal d'entrée présente deux composantes spectrales : une à une fréquence nulle d'amplitude E_0 et une à une fréquence ω_0 d'amplitude E_{1m} .

Compte tenu de la fonction de transfert du filtre, la composante de fréquence nulle est multipliée par 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$) et celle de fréquence ω_0 est multipliée par H_0 (pas de déphasage puisque la fonction de transfert est réelle à ω_0). On en déduit **$s_1(t) = 0 \times E_0 + H_0 E_{1m} \cos(\omega_0 t + 0)$**

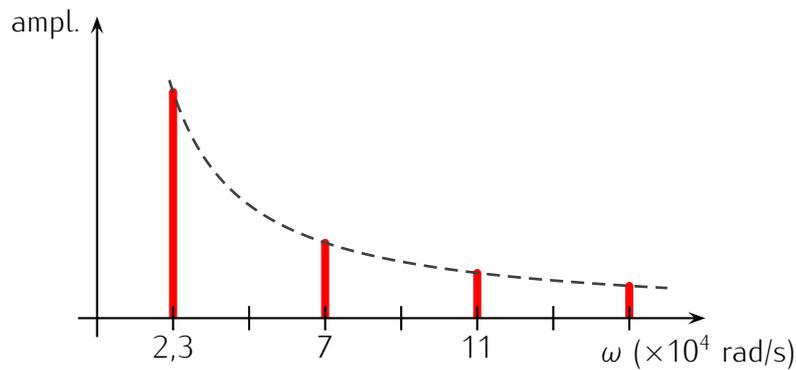
Q42

On rappelle que si c_n et φ_n sont les amplitudes et les phases du signal d'entrées correspondant aux fréquences f_n , alors

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |H(f_n)| c_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n + \arg(H(f_n)))$$

Q43

7. (a) L'allure du spectre est représentée ci-dessous. Les pics décroissent en $1/f$.



Q44 (b) En utilisant le diagramme de Bode en gain, figure 1, calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie s_2 .

- Le terme de pulsation ω_2 correspond à $x_2 = 1/3$. D'après le diagramme de bode son amplitude est atténuée par le filtre d'environ 50 dB. Cela équivaut à une amplitude multipliée par $10^{-50/20} = 3 \cdot 10^{-3}$;
- le terme de pulsation $3\omega_2 = \omega_0$ voit comme précédemment son amplitude multipliée par $1/2$;
- Le terme de pulsation $5\omega_2$ correspond à $x_2 = 5/3 \simeq 1,7$. D'après le diagramme de bode son amplitude est atténuée par le filtre d'environ 50 dB. Cela équivaut à une amplitude multipliée par $10^{-50/20} = 3 \cdot 10^{-3}$;

Les amplitudes sont donc :

- Pour le terme de pulsation ω_2 : $\frac{4}{\pi} E_{2,m} \times 3 \cdot 10^{-3} = 4,03 \times 10^{-3} \text{ V}$
- Pour le terme de pulsation $3\omega_2$: $\frac{4}{\pi} E_{2,m} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 2,12 \times 10^{-1} \text{ V}$
- Pour le terme de pulsation $5\omega_2$: $\frac{4}{\pi} E_{2,m} \times \frac{1}{5} \times 3 \cdot 10^{-3} = 8,05 \times 10^{-4} \text{ V}$

Q45 (c) Le terme de pulsation $3\omega_2$ domine donc nettement les autres. L'expression approchée du signal de sortie $s_2(t)$ est donc $-\frac{2}{3\pi} E_{2,m} \sin(3\omega_2 t)$ (il n'y a pas de déphasage à ω_0 comme nous l'avons vu avant).

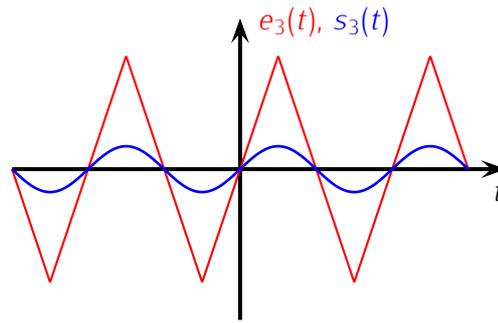
Dans le cas présent, la pulsation du signal de sortie $3\omega_2$ est égale au triple de celle du signal d'entrée, ce qui explique la dénomination proposée de « tripleur de fréquence ». Néanmoins, cela ne vaut que pour un signal d'entrée de pulsation $\omega_0/3$ et contenant une harmonique de rang 3 non nul : le triplage de fréquence ne vaut que dans certains cas très précis, et est loin d'être propre à tout signal. En résumé, appeler ce montage « tripleur de fréquence » serait impropre car trop particulier.

8. Le fondamental est à la pulsation centrale du filtre, alors que la première harmonique non-nulle (harmonique de rang 3) est à une pulsation pour laquelle l'atténuation est supérieure à 50 dB. On peut donc raisonnablement négliger la contribution au signal de sortie de toutes les harmoniques de rang $n \geq 3$, ce qui permet d'écrire

$$s_3(t) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\pi^2} E_{3,m} \sin(\omega_3 t) = \frac{2}{\pi^2} E_{3,m} \sin(\omega_3 t)$$

toujours sans déphasage. Le signal de sortie est donc un signal sinusoïdal de pulsation ω_3 , sans phase initiale et d'amplitude $\frac{2}{\pi^2} E_{3,m} \simeq 200 \text{ mV}$. Les signaux sont représentés ci-dessous.

Q46



VIVE LES LOOPINGS !

Q47

1. (a) Théorème de l'énergie mécanique : la variation d'énergie cinétique d'un **point** matériel entre deux instants est égale, dans un référentiel **galiléen**, au travail de la résultante des forces non conservatives qui lui sont appliquées entre ces deux instants.

$$\Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} = W_{nc,1 \rightarrow 2}(\vec{F})$$

Attention à la notation Δ qui est source d'erreur, préférez $E_{m,2} - E_{m,1}$.

Un théorème sans hypothèses ne vaut aucun point (demandez à votre enseignant de mathématiques).

- (b) Système : la bille ; bilan des forces : force du ressort (conservative), poids (ne travaille pas car mouvement horizontal pour cette question), réaction du support (idem). Référentiel terrestre, lié à la piste, considéré comme galiléen.

Définissez le système mécanique + bilan des forces

Les hypothèses du théorème étant vérifiées (système ponctuel et référentiel galiléen), on peut appliquer le théorème énoncé ci-dessus. Puisque seule la force du ressort travaille et qu'elle est conservative, alors $W_{nc} = 0$.

Lorsque vous appliquez un théorème, montrez que vous avez vérifié ses conditions d'application même si les hypothèses sont vérifiées de façon évidentes.

On considère l'instant initial où le ressort est comprimé et la bille lâchée sans vitesse initiale, l'énergie mécanique est donc $E_{m,1} = \frac{1}{2}m \times 0^2 + \frac{1}{2}kd^2$.

On considère comme instant final le moment où la bille quitte le ressort, le ressort est donc à une elongation nulle. On en déduit $E_{m,2} = \frac{1}{2}m \times v_0^2 + \frac{1}{2}k \times 0^2$.

Définissez précisément le système, l'instant 1 et l'instant 2, un schéma peut aider.

Q48

D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a donc $\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$, d'où $d = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Q49

- (c) Application numérique : $d = 4\sqrt{\frac{10^{-2}}{4 \times 10^2}} = 4\sqrt{\frac{\times 10^{-4}}{4}} = \boxed{2 \times 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm}}$.

attention aux unités !

Q50

2. (a) Théorème de l'énergie cinétique : la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale, dans un référentiel galiléen, au travail de la résultante des forces qui lui sont appliquées entre ces deux instants.

$$\Delta E_c = E_{c,2} - E_{c,1} = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F})$$

Travail de toutes les forces, pas seulement des forces conservatives !

- (b) Analyse qualitative du signe : puisque l'on monte entre A et B et que \vec{p} est dirigé vers le bas, alors il « résiste ». Son travail doit donc être négatif, ce qui nous permettra de vérifier le signe de notre calcul.

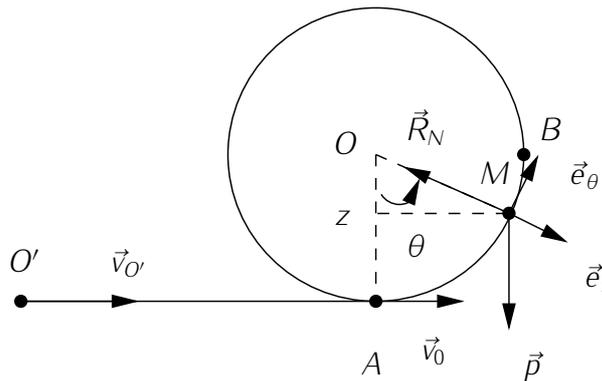
Analyse quantitative : on utilise l'énergie potentielle pour calculer facilement le travail du poids. L'expression $\vec{p} \cdot \vec{AB}$ est ici tout à fait juste mais pas très pratique à utiliser directement, à moins de décomposer $\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$.

L'énoncé ne définit pas d'axe vertical, si vous voulez en utiliser un, il vous faut le définir.

Soit Oz un axe ascendant, on a alors $E_p = +mgz$ une fonction croissante de z (E_p augmente quand z augmente) et le travail du poids est simplement $W = -\Delta E_p = -(mgz_M - mgz_A) = mg(z_A - z_M)$ on trouve bien un travail négatif. Exprimons le en fonction des données du problème : $z_A = -R$ et $z_M = -R \cos \theta$ d'où le travail $W = -mgR(1 - \cos \theta) = mgR(\cos \theta - 1)$

Q51

Il était demandé de vérifier le signe du poids, faites le ! Pour cela, faites une analyse qualitative à part. Je vous conseille de la faire avant pour ne pas être influencé par le résultat de votre calcul.



- (c) Par application du théorème précédent sur la bille entre les positions A et M, on peut écrire

$$\Delta E_c = W(\vec{p}) + W(\vec{R})$$

or \vec{R}_N la réaction du support est perpendiculaire au déplacement à tout instant, son travail est nul et le travail du poids a déjà été calculé. On a ainsi

$$\Delta E_c = W = -\Delta E_{p,pes} + 0 \iff \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -mgR(1 - \cos \theta) \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$$

Q52

et si $v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta) \geq 0$, alors $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)}$.

3. Principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement dans \mathcal{R}_g .

(Si vous considérez un système **fermé** de points, alors il suffit de considérer la somme des forces extérieures, mais il faut parler de l'accélération du centre de masse, l'accélération "du système" n'a pas de sens.)

Et par application sur la bille, dans le système de coordonnées polaires,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

On a par ailleurs $\vec{p} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{R}_N = -R_N \vec{e}_r$, soit :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}_N \Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - R_N \iff R_N = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \text{ par projection sur } (OM)$$

Et en utilisant $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 \iff \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}[v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)]$, on obtient

$$R_N = mg \cos \theta - 2mg(1 - \cos \theta) + \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow \boxed{R_N = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}}$$

Q53

4. (a) La bille effectue un tour complet si elle reste **toujours** en contact avec le rail ($\forall \theta; R_N > 0$) **et** si sa vitesse est non nulle ($v > 0$) tout au long du mouvement (deux conditions).

Q54

- R_N est minimale pour $\theta = \pi$ (c'est à dire au point C) et

$$\forall \theta; R_N > 0 \iff R_N(\theta = \pi) > 0 \iff mg(-3-2) + \frac{mv_0^2}{R} > 0 \iff v_0^2 > 5gR \Rightarrow v_0 > \sqrt{5gR}$$

- De même, v est minimale pour $\theta = \pi$ et

$$v(\theta = \pi) > 0 \iff -2gR(1 - \cos \pi) + v_0^2 > 0 \iff v_0^2 > 4gR \Rightarrow v_0 > 2\sqrt{gR}$$

Conclusion : il faut que $\boxed{v_0 > \sqrt{5gR}}$.

- (b) La condition précédente est équivalente à $\boxed{R < \frac{v_0^2}{5g}}$.

Numériquement $\frac{v_0^2}{5g} = \frac{4^2}{5 \times 10} = \frac{16}{5} \times \frac{1}{10}$ or $16 = 15 + 1$, d'où $16/5 = 3,2$. On en déduit $\boxed{R < 32 \text{ cm}}$.

Q55

Ce qui fait quand même un beau looping! (diamètre de 64 cm).

- (c) Si $v_0 < \sqrt{5gR}$, la bille va soit rebrousser chemin si elle s'arrête à $\theta = \theta_a < \frac{\pi}{2}$, soit décoller du rail si elle s'arrête en $\theta = \theta_a > \frac{\pi}{2}$.

Q56

Elle s'arrêtera en $\theta_a = \frac{\pi}{2}$ si $v(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \iff v_0^2 - 2gR(1 - 0) = 0$ soit $v_0 = \sqrt{2gR}$.

Conclusion, la bille rebrousse chemin si $\boxed{v_0 < \sqrt{2gR}}$ et dans le cas général, elle s'arrêtera

en $\theta = \theta_a$ tel que $v(\theta = \theta_a) = 0 \iff v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta_a) = 0$ soit $\boxed{\theta_a = \arccos(1 - \frac{v_0^2}{2gR})}$.

- (d) Si $\boxed{\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR}}$, v s'annulerait pour $\theta > \frac{\pi}{2}$ mais en fait, la bille décolle en $\theta = \theta_d$

Q57

tel que $R_N(\theta = \theta_d) = 0 \iff \frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos \theta_d - 2) = 0$ soit $\boxed{\theta_d = \arccos(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR})}$.

VERRE EN ÉQUILIBRE

Q58 1. Cf cours

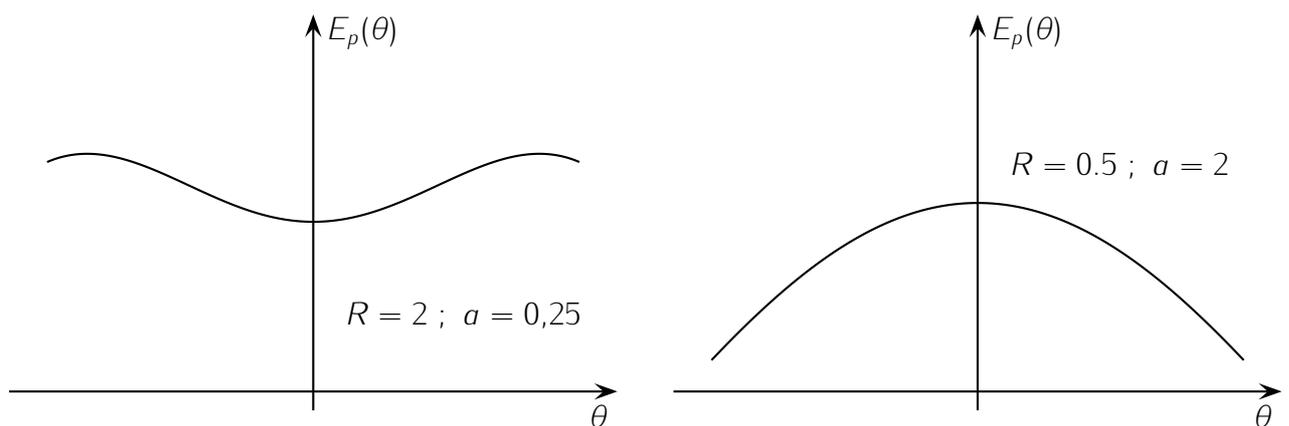
Q59 2. Cf cours

Q60 3. Cf cours

Q61 4. Cf cours

Q62 1. Le parallélépipède est soumis à son poids qui est une force conservative ($E_p = mgz$) et la réaction du cylindre qui ne travaille pas, car il n'y a pas de glissement d'un solide sur l'autre.Q63 2. Grâce à la relation de Chasle : $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = R\vec{e}_r - R\theta\vec{e}_\theta + a\vec{e}_r$. En effet la rotation sans glissement implique $AB = R\theta$.Q64 3. L'énergie potentielle de pesanteur pour le cube est : $E_p(\theta) = mgz_C = mg\vec{OC} \cdot \vec{e}_z$. Or $\vec{OC} \cdot \vec{e}_z = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + a\cos\theta$. Enfin : $E_p(\theta) = mg(R\cos\theta + R\theta\sin\theta + a\cos\theta)$.Q65 4. $\frac{1}{mg} \frac{dE_p}{d\theta} = -(R+a)\sin\theta + R\sin\theta + R\theta\cos\theta = -a\sin\theta + R\theta\cos\theta$. On a donc bien une position d'équilibre en $\theta = 0$ car $\frac{1}{mg} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta = 0) = 0$.Q66 5. Pour étudier la stabilité on regarde la dérivée 2nd évaluée en $\theta = 0$: $\frac{1}{mg} \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -a\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\sin\theta$ $\frac{1}{mg} \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta = 0) = R - a$. D'où $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si $R > a$ et instable sinon.

Ci-dessous les profils d'énergie dans les 2 cas au voisinage de 0.



Q67 6. On peut donner deux conseils à Baptiste : arrêter la bière ou alors augmenter le rayon de courbure de son ventre et donc avoir un ventre plat : AU RÉGIME !.