

INTRODUCTION AU MONDE QUANTIQUE

Exercice 1 : Etude d'un puits de potentiel infini

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans $x=0$ et $x=l$ dans un puits infini. On donne sa fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = A \sin(kx) \exp(-i\omega t)$$

1. A l'aide du principe d'incertitude d'Heisenberg, estimer son énergie minimale.
2. Déterminer les valeurs possibles de k en fonction de l et d'un entier n positif quelconque.
3. Quelle est la signification physique de $|\psi(x,t)|^2 dx$? Justifier la condition de normalisation

$$\int_0^l |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

- . Normaliser la fonction pour obtenir l'expression de A en fonction de l .
4. Tracer $|\psi(x,t)|^2$ en fonction de x pour les cas $n=1$ et 2. Commenter et comparer au cas d'une particule classique.

Exercice 2 : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

Dans un modèle classique de l'atome d'hydrogène, les électrons décrivent des orbites circulaires de rayon r autour du proton. Pour qu'un tel état puisse exister quantiquement, il faut que l'onde associée à l'électron revienne en phase avec elle-même lorsque l'électron fait un tour autour du proton.

1. À l'aide du principe d'incertitude de Heisenberg (et de vos connaissances en ordre de grandeur), estimer l'ordre de grandeur de la vitesse d'un électron dans un atome d'hydrogène.
 2. Quel lien peut-on établir entre la longueur d'onde associée à l'électron et le rayon de l'orbite ?
 3. En déduire la condition (dite de Bohr) qui relie le rayon r de l'orbite, la quantité de mouvement p de l'électron et la constante de Planck réduite et un entier k
 4. Un calcul classique montre que la quantité de mouvement d'un électron en rotation autour d'un proton avec une orbite de rayon r possède une quantité de mouvement proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{r}}$. En déduire comment varie le rayon r_n d'une orbite de Bohr en fonction de l'entier n .
 5. Par un raisonnement simple, dire comment les niveaux d'énergie E_n de l'électron dans l'atome dépendent de n . Le résultat est-il correct ?
1. $\hbar \leq \Delta x \Delta p \simeq amv$ d'où $v \simeq \hbar/(am) \simeq 10^{-34}/(10^{-10}10^{-30}) \simeq 10^6$ m/s
 2. En un tour, l'électron parcourt une distance $2\pi r$. Pour que l'onde revienne en phase, il faut que cette distance soit un multiple entier de la longueur d'onde, donc $2\pi r = n\lambda$
 3. On utilise la relation de de Broglie : $\lambda = h/p$, on en déduit que $2\pi r = nh/p \Rightarrow rp = n\hbar$
 4. $p \propto 1/\sqrt{r} \Rightarrow rp \propto r/\sqrt{r} \propto n\hbar \propto n$ Donc le rayon croît comme le carré de n .
 5. Si l'on considère l'énergie cinétique, elle est en $p^2/(2m) \propto 1/r \propto 1/n^2$. De même l'énergie potentielle de ce phénomène est en $1/r$ comme on le verra en mécanique, donc les niveaux d'énergie sont en $1/n^2$ ce qui correspond bien aux expériences de spectroscopie qui mesure les différences d'énergies entre deux niveaux grâce à la longueur d'onde.

Exercice 3 : Mécanique quantique des gaz et température

- On considère tout d'abord des grains de sables qui se déplacent à quelques mètres par secondes. Évaluer la longueur d'onde de de Broglie. La mécanique quantique est-elle nécessaire pour décrire ce que l'on appelle les gaz granulaires ? (ensemble de nombreux grains de sables qui ont des vitesses quasi-aléatoires)
- Et pour un atome d'hélium (Hélium 4) à température ambiante ? On admettra que la vitesse d'agitation thermique d'un atome est reliée à la température par la relation suivante : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$ (On donne $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann et la masse d'un nucléon : $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)
- On se propose maintenant de trouver un ordre de grandeur de température limite au-delà de laquelle les effets quantiques ne jouent pas
 - En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits $pV = nRT$, exprimer la densité d'un gaz parfait en fonction de la température, de la pression et de la masse molaire du gaz.
 - En déduire un ordre de grandeur de la distance interparticulaire (c'est-à-dire la distance moyenne entre une particule et sa plus proche voisine). On pourra supposer que toutes les particules sont séparées par la même distance et qu'elles sont réparties de façon régulières.
 - À partir des questions précédentes, trouvez la température en deçà de laquelle il faut prendre en compte les effets quantiques.
 - Vérifiez l'homogénéité du résultat précédent.
- grain de sable : typiquement $100 \mu\text{m} = 10^{-4}$ m. Masse volumique : celle du verre a priori, de l'ordre de 2500 kg/m^3 , donc masse $m \simeq 10^{-9}$ kg (peu importe le 2 vu que l'incertitude sur la taille du grain de sable est bien plus grande et en plus élevée au cube). On a donc $\lambda \sim 6 \cdot 10^{-34} / 1 \cdot 10^{-9} \sim 10^{-25}$ m donc on se moque complètement de la mécanique quantique (et on a tellement de marge que même si on s'est trompé de plusieurs ordres de grandeur c'est encore bon)
- $v = \sqrt{3k_B T/m} \Rightarrow p = \sqrt{3mk_B T}$ donc $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \simeq \frac{6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 4 \times 1,6 \cdot 10^{-27} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}} \simeq \frac{6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{80 \cdot 10^{-50}}} \simeq \frac{6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-25}} \simeq 0,7 \cdot 10^{-9} = 7 \cdot 10^{-10}$ m donc typiquement la taille d'un atome. On pourrait avoir des effets quantiques ... si on était dans un solide, mais là, les parois ou les autres particules sont plus loin.
- $pV = nRT = mRT/M$ donc $\rho = m/V = pM/RT$
 - si on considère que les particules sont sur un réseau cubique et sont distantes de a , alors le volume propre d'une particule est a^3 et donc la masse volumique est m_{He}/a^3 (masse d'un atome sur le volume propre de l'atome) d'où $m_{He}/a^3 = \rho = pM/RT \Rightarrow a^3 = m_{He}RT/pM = RT/pN_A = k_B T/p$
 - C'est la température pour laquelle la distance entre les particules est de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie $a \simeq \lambda \Leftrightarrow \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} = \sqrt[3]{k_B T/p} \Leftrightarrow \frac{h^6}{(3mk_B T)^3} = (k_B T/p)^2 \Leftrightarrow (k_B T)^5 = \frac{h^6 p^2}{3^3 m^3}$ donc $T = \frac{1}{k_B} \sqrt[5]{\frac{h^6 p^2}{27 m^3}} = 3 \text{ K}$ Cette limite n'est pas à prendre au pied de la lettre, mais on observe bien des effets quantiques dans l'hélium à ces températures, mais l'approximation du gaz parfait n'est probablement plus valide !
 - Homogénéité : $[h] = ML^2 T^{-1}$; $[p] = [F/S] = ML^{-1} T^{-2}$; $[m] = M$; $[k_B T] = [E_c] = ML^2 T^{-2}$ donc à gauche on a $M^5 L^{10} T^{-10}$ et à droite : $\frac{M^6 L^{12} T^{-6} M^2 L^{-2} T^{-4}}{M^3} = M^5 L^{10} T^{-10}$

Exercice 4 : Absorption de photons

- En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, déterminer l'expression des énergies totales E_n d'un quanton de masse m confiné dans un puits de potentiel infini de largeur L .
- Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence ν_{nk} si l'écart $E_n - E_k$ entre deux niveaux d'énergie vérifie : $E_n - E_k = h\nu_{nk}$.

- (a) Quelle est l'interprétation physique de la relation précédente ?
- (b) Déterminer les fréquences ν_{12} et ν_{31} , ainsi que les longueurs d'onde correspondantes pour un puits à semi-conducteur à base d'arséniure de gallium, d'épaisseur $L = 6$ nm et tel que $m_a = 0,067m$ avec m la masse de l'électron.
- (c) À quel domaine du spectre appartiennent les rayonnements ?

Exercice 5 : Cellule photoélectrique au potassium

La cathode d'une cellule photoélectrique au potassium est éclairée par deux radiations lumineuses monochromatiques de longueur d'onde $\lambda = 490$ nm et $\lambda = 660$ nm. La puissance $P = 9,00$ W de ces deux sources de rayonnement est la même. Le travail d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2,25$ eV.

1. Les deux radiations permettent-elles l'émission d'électrons ?
2. Déterminer l'expression de la vitesse des électrons émis par la cathode et calculer sa valeur numérique.
3. On observe que l'intensité du courant de saturation est $I_s = 4,00 \cdot 10^{-8}$ A. Déterminer le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus. On supposera que tous les électrons participent au courant de saturation.