ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Cours de révision et compléments

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

A. Définitions et premières propriétés

Définition 1

- On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation différentielle de la forme :
$$(E) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$
où a et b sont deux fonctions **continues** sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Une *solution de* (E) *sur* I est une fonction f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui vérifie pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.
- On appelle *équation homogène associée à* (E) l'équation différentielle :
$$(H) \qquad y' + a(t)y = 0.$$

- Si f est solution de (E) sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- On note $\mathscr{S}_{E,I}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I et $\mathscr{S}_{H,I}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I.
- Lorsque l'équation différentielle est sous la forme $a(t)y' + b(t)y = c(t)$, on se place sur des intervalles I où la fonction a ne s'annule pas et on divise par $a(t)$ pour se ramener à la forme ci-dessus.

Proposition 2 (*Principe de superposition des solutions*)

Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_1(t)$ sur I et y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_2(t)$ sur I alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + b_2(t)$ sur I.

Proposition 3

$\mathscr{S}_{H,I}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}(I, \mathbb{K})$.

B. Résolution

Théorème 4

Si $\mathscr{S}_{H,I}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) sur I et y_p est une solution particulière de (E) sur I alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est :

$$\mathscr{S}_{E,I} = \{y_p + y,\ y \in \mathscr{S}_{H,I}\}.$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (E)

Théorème 5

Soit A une primitive de a sur I (qui existe car a est supposée continue sur I).
L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ sur I est :

$$\mathscr{S}_{H,I} = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(f)$$

en notant f la fonction définie sur I par : $\forall t \in I,\ f(t) = e^{-A(t)}$.

$\mathscr{S}_{H,I}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

2. Recherche d'une solution particulière de (E)

Méthode de variation de la constante :

- Soit A une primitive de a sur I.
  On cherche une solution particulière de l'équation (E) $y' + a(t)y = b(t)$ sous la forme :

  $$\forall t \in I,\ f(t) = \lambda(t)e^{-A(t)} \text{ où } \lambda \text{ est une fonction dérivable sur } I.$$

- f est solution de (E) sur I si et seulement si $\forall t \in I,\ \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.
- Il suffit donc de prendre pour λ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I (qui existe puisque cette fonction est continue sur I).

Une fois $t \mapsto \lambda(t)$ déterminée, attention de ne pas oublier de multiplier par $t \mapsto e^{-A(t)}$ pour obtenir une solution particulière de (E).

Par conséquent, en notant A une primitive de a sur I et t_0 un élément de I, on a :

$$\boxed{\mathscr{S}_{E,I} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} + \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}\mathrm{d}s\right)e^{-A(t)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.}$$

C. Problème de Cauchy

Définition 6

On appelle *problème de Cauchy linéaire du premier ordre* la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.

Théorème 7

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On suppose que a et b sont continues sur I.
Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I c'est-à-dire qu'il existe une unique fontion $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ telle que $\forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$ et $f(t_0) = y_0$.

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle $\mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}(t)y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t^2}}$ sur $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Exemple 2 : Complément sur les systèmes différentiels du premier ordre à cœfficients constants

Résoudre les systèmes différentiels suivants sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{S}_1)\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathscr{S}_2)\begin{cases} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & (3-4i)x_1 + (2+4i)x_2. \end{cases}$$

II. Équations différentielles linéaires du second ordre à cœfficients constants

A. Définitions et premières propriétés

Définition 8

- On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants* toute équation différentielle de la forme :

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c(t)$$

  où $(a, b) \in \mathbb{K}$ et c est une fonction **continue** sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Une *solution de* (E) *sur* I est une fonction f deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui vérifie pour tout $t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$.
- On appelle *équation homogène associée à* (E) l'équation différentielle :

$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

Si f est une solution de (E) sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

Proposition 9 (*Principe de superposition des solutions*)

Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(t)$ sur I et y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2(t)$ sur I alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = \lambda c_1(t) + c_2(t)$ sur I.

Proposition 10

$\mathscr{S}_{H,I}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

B. Problème de Cauchy

Définition 11

On appelle *problème de Cauchy linéaire du second ordre à cœfficients constants* la donnée d'une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants et des conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = x_0$ où $(t_0, y_0, x_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Théorème 12

Soit $(t_0, y_0, x_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On suppose que $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et c est continue sur I.
Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction f deux fois dérivable sur I telle que :
$\forall t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$, $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = x_0$.

C. Résolution

Théorème 13

Si $\mathscr{S}_{H,I}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) sur I et y_p est une solution particulière de (E) sur I alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est :

$$\mathscr{S}_{E,I} = \{y_p + y,\ y \in \mathscr{S}_{H,I}\}.$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (E)

On considère l'équation homogène (H) $y'' + ay' + by = 0$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
On appelle *équation caractéristique associée à* (H) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ où $r \in \mathbb{K}$.
On la note (e_c) et on note Δ le discrimant du trinôme du second degré $r \mapsto r^2 + ar + b$.

Théorème 14

- $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$:
  i) Si $\Delta \neq 0$ alors (e_c) possède deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.
  On a alors :
  $$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$$
  ii) Si $\Delta = 0$ alors (e_c) possède une racine complexe double r_0.
  On a alors :
  $$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$$
- $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$:
  i) Si $\Delta > 0$ alors (e_c) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
  On a alors :
  $$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
  ii) Si $\Delta = 0$ alors (e_c) possède une racine réelle double r_0.
  On a alors :
  $$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
  iii) Si $\Delta < 0$ alors (e_c) possède deux racines complexes conjuguées distinctes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
  On a alors :
  $$\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On obtient dans chaque cas une base de $\mathscr{S}_{H,\mathbb{R}}$, qui est de dimension 2.

2. Recherche d'une solution particulière de (E)

On considère l'équation $(E)\ \ y'' + ay' + by = c(t)$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
Suivant la fonction c, on pourra chercher une solution particulière de (E) sous une certaine forme.

- On suppose que $c(t) = P(t)e^{mt}$ où P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{K}$.
  On cherche une solution particulière sous la forme :
  (i) $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$ si m n'est pas une racine de (e_c)
  (ii) $y_p(t) = tQ(t)e^{mt}$ si m est une racine simple de (e_c) , où Q est un polynôme de degré n.
  (iii) $y_p(t) = t^2Q(t)e^{mt}$ si m est une racine double de (e_c)

- On suppose que $c(t) = \alpha \mathrm{ch}(mt)$ ou $c(t) = \alpha \mathrm{sh}(mt)$ avec $(\alpha, m) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}$.
  On cherche une solution particulière pour le second membre $c_1(t) = e^{mt}$ puis pour le second membre $c_2(t) = e^{-mt}$ et on applique le principe de superposition.
- On suppose que $c(t) = \alpha\cos(mt)$ ou $c(t) = \alpha\sin(mt)$ avec $(\alpha, m) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}$.
  On cherche une solution particulière pour le second membre $c_1(t) = e^{imt}$ puis pour le second membre $c_2(t) = e^{-imt}$ et on applique le principe de superposition.
  Si a, b et α sont des réels alors on peut aussi chercher une solution particulière Y_p pour le second membre $c(t) = \alpha e^{imt}$, $\mathrm{Re}(Y_p)$ est alors une solution pour le second membre $\alpha\cos(mt)$ et $\mathrm{Im}(Y_p)$ pour le second membre $\alpha\sin(mt)$.

Exemple 3 : Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\ y'' + y = e^{-t} + \cos(t) \quad \text{et} \quad (E_2)\ y'' + 4y' + y = e^{-t}\sin(t).$$

Pour finir, on rappelle qu'il est possible de chercher pour toute équation différentielle des solutions développables en série entière.