**6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 8**

Un *guide d'onde* est un cylindre métallique creux illimité, d'axe Oz, et dont la section droite est le rectangle $0 < x < a$ et $0 < y < b$. L'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide.
On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait, c'est à dire de conductivité infinie.
Dans ces conditions, *le champ électromagnétique est nul dans le métal*.

On se propose d'étudier la propagation suivant Oz dans ce guide d'une onde électromagnétique progressive monochromatique de pulsation $\omega$, dont le champ électrique s'écrit :
$\vec{E} = A(x,y)\cos(\omega t - k_g z)\vec{u}_x$ où $A(x,y)$ est une fonction réelle de x et y et $k_g$ une constante positive.

On posera $k_g = 2\pi/\lambda_g$ ($\lambda_g$ est la longueur d'onde guidée) et on notera $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$.

a-Montrer que $A(x,y)$ ne dépend pas de x.

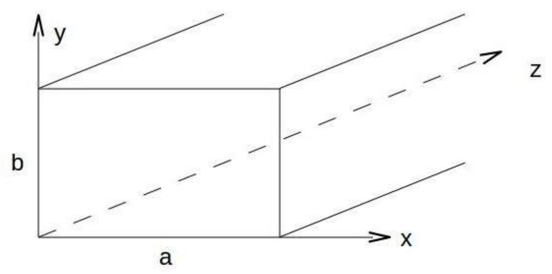
b-Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $A(y)$.

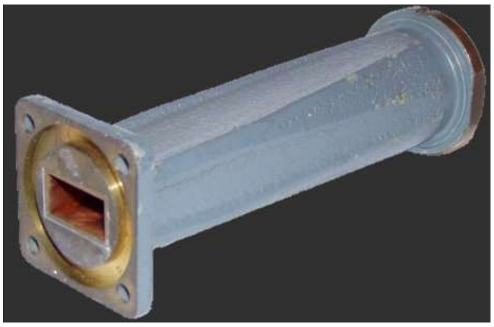
c-En utilisant la continuité du champ électrique sur les plans conducteurs $y=0$ et $y=b$, trouver la fonction $A(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul. A chaque valeur de n correspond un mode de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit.

d-Exprimer $k_g$ en fonction de $\omega$, c, n et b. Comment s'appelle cette relation ?
En déduire $\lambda_g$ en fonction de $\lambda_0$, b et n. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure $f_c$ en dessous de laquelle il n'y a plus propagation. A.N : $f_c = 2{,}5$ GHz pour $n = 1$, calculer b.

e-Exprimer et représenter les vitesses de phase $v_\varphi$ et de groupe $v_g$ de l'onde en fonction de c, n et de $f/f_c$.
Que signifie la dépendance de la vitesse de phase avec la fréquence ?

f-Déterminer le champ magnétique. Commenter sa structure.



**6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 8**

---

a-Equation de Maxwell-Gauss dans le vide : $\mathrm{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = 0$

<u>A ne dépend pas de x</u> : A(y)

b-<u>Equation de propagation dans le vide</u> : $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta E_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2A(y)}{dy^2}\cos(\omega t - k_g z) - k_g^2 A(y)\cos(\omega t - k_g z) = -\frac{\omega^2}{c^2}A(y)\cos(\omega t - k_g z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2A(y)}{dy^2} + (k_0^2 - k_g^2)A(y) = 0}$$

c-Le champ électrique doit s'annuler au contact des plans métalliques en y = 0 et y = b. Donc : A(0) = A(b) = 0

On suppose $k_0^2 - k_g^2 > 0$ pour avoir une solution A(y) sinusoïdale qui peut s'annuler deux fois.

$$A(y) = E_0 \sin(\sqrt{k_0^2 - k_g^2}\,y) + E_1 \cos(\sqrt{k_0^2 - k_g^2}\,y)$$

<u>Conditions aux limites</u> : A(0) = 0 => $E_1 = 0$

$A(b) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{k_0^2 - k_g^2}\,b) = 0 \Rightarrow \sqrt{k_0^2 - k_g^2}\,b = n\pi$ n entier positif

Donc : $\boxed{A(y) = E_0 \sin(\frac{n\pi}{b}y)}$ et $\boxed{\vec{E} = E_0 \sin(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\omega t - k_g z)\vec{u}_x}$

<u>Le champ électrique est une onde non plane, non amortie, progressive selon Oz et harmonique</u>.

d- $\sqrt{k_0^2 - k_g^2}\,b = n\pi$ donne : $\boxed{k_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}}}$ C'est la <u>relation de dispersion</u>

$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_g} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2c^2}{b^2\omega^2}}}$ or $2\pi/\lambda_0 = \omega/c$ donc : $\boxed{\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{n^2\lambda_0^2}{4b^2}}}}$

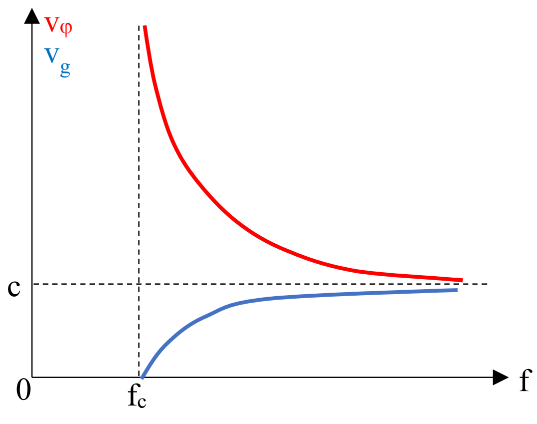
Il y a <u>propagation si $k_g$ est réel</u> $\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} > 0 \Rightarrow \omega > \frac{n\pi c}{b} \Rightarrow \boxed{f > f_c = \frac{nc}{2b}}$

A.N : <u>b = 6 cm</u>

e- On a : $v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2c^2}{b^2\omega^2}}}$ Donc : $\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}}}$

On dérive $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ par rapport à ω :

$2k_g\frac{dk_g}{d\omega} = \frac{2\omega}{c^2} \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}}$




f-<u>Equation de Maxwell-Faraday</u> : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{k_g E_0}{\omega}\sin(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\omega t - k_g z) \\ \frac{n\pi E_0}{b\omega}\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}}$$

<u>Le champ magnétique n'est pas transversal car il a une composante selon Oz</u>.

---