

Questionnaire probabiliste

I) Espaces probabilisés

1) a: - A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$ ou A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément

- A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
La réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.

b: - On ne peut pas avoir pile et face en même temps, d'où $F_2 \cap P_2 = \emptyset$

d'où P_2 et F_2 sont incompatibles

de plus, $P(P_2 \cap F_2) = P(\emptyset) = 0$

$$P(P_2) = P(F_2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } P(P_2 \cap F_2) \neq P(P_2)P(F_2)$$

d'où P_2 et F_2 ne sont pas indépendants

- On peut avoir successivement 2 faces, d'où $F_2 \cap F_2 \neq \emptyset$

d'où F_2 et F_2 ne sont pas incompatibles

On note $\Omega = \{(p,p), (p,f), (f,p), (f,f)\}$ avec $f = \text{face}$ et $p = \text{pile}$

En munissant $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme on a:

$$P(F_2 \cap F_2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{de plus, } P(F_2) = \frac{1}{2} = P(F_2)$$

$$\text{d'où } P(F_2)P(F_2) = P(F_2 \cap F_2)$$

d'où F_2 et F_2 sont indépendants

2) a: Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{I}}$ des événements, $\mathbb{I}$ un ensemble au plus dénombrable.

► $(A_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est un système complet d'événements lorsque:

$$- \bigcup_{n \in \mathbb{I}} A_n = \Omega, \quad \forall i, j \in \mathbb{I} / i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

- Pour chaque expérience, un unique A_i se réalise

► $(A_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est un système quasi-complet d'événements lorsque:

$$- \sum_{n \in \mathbb{I}} P(A_n) = 1, \quad \forall i, j \in \mathbb{I} / i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

- Donc pour quelques expériences (réalisables) pour toute expérience un unique A_i se réalise

évenements strictement indépendants
une et non plusieurs se réalisent
probabilité d'événement

b) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements, alors $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système quasi-complet d'événements.

Preuve: Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements.

Les $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont 2-à-2 incompatibles, donc par σ -additivité, on a:

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(A_n)$$

$$\text{et } P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n\right) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{donc } \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(A_n) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 / i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

c) - $\forall (x, y) \in (X \cap \Omega)^2 / x \neq y, \quad (X=x) \cap (X=y) = \emptyset$ (X ne peut prendre qu'une seule valeur à la fois)

$$- \bigcup_{x \in K(\Omega)} (X=x) = \Omega \quad \text{par définition}$$

donc $\{(X=x)_{x \in K(\Omega)}\}$ est un système complet d'événements.

3) a) On a $A \subset B$ lorsque:

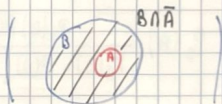
- $\forall$: A se réalise, alors B aussi.
- $\forall \omega \in A, \quad \omega \in B$.

b) On a $B = A \cup (B \cap \bar{A})$

$$\text{de plus, } A \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$$

$$\text{Alors, } P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0}$$

d'où $\underline{P(B) \geq P(A)}$ (On peut donner ce résultat directement "par diagramme de Venn".)



$$\text{c) Par définition, } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)} = 0$$

Comme P_B est une probabilité elle est positive, d'où $\underline{P_B(A) = 0}$

4) a) - $A \setminus B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}$

- $A \setminus B$ correspond à l'événement "A se réalise et B ne se réalise pas"

$$\text{b) On a } \underline{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

5) a: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b: Il faut que A et B soient incompatibles

(se fait et se suffit que
A et B sont incompatibles.)

c: $P(A \cap B) = P(A)P_B(B) = P(A)P_B(A)$

C'est la formule des probas composées.

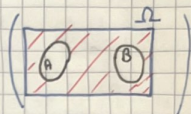
en supposant $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

(ou en utilisant la convention des probas.)

d: Il faut que A et B soient indépendants

e: Par la loi de Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

donc $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$



Comme A et B sont incompatibles, $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A) - P(B)$

6) - $P(B \cap \overline{A}) = P_B(B) \times P(\overline{A})$

donc $P(B \cap \overline{A}) = (1 - P(A))P_B(B)$

-(A, A) est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités

totales, on a: $P(B) = P_A(B)P(A) + P_B(B)P(\overline{A})$

d'où $P(B) = P_B(B) + P(A)(P_A(B) - P_B(B))$

- Par la formule de Bayes: $P_B(B) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$

en supposant $P(B) \neq 0$.

donc $P_A(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P_B(B) + P(A)(P_A(B) - P_B(B))}$

7) a: - $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{ \omega \in \Omega / \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \}$

- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspond à l'événement "tous les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se réalisent"

• $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{ \omega \in \Omega / \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \}$

• $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspond à l'événement "au moins un A_i se réalise"

b: Pour l'union:

• Si les événements sont 2-à-2 incompatibles,

- $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$

- $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

(σ-additivité)

• Dans le cas infini:

$$- P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

$$- \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite croissante } (\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}), P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Pour l'inclusion:

• Dans le cas fini:

$$- P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1) P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

$$- \text{Si les événements sont indépendants, } P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$$

• Dans le cas infini:

$$- P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

$$- \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante } (\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n), P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Soit $\mathcal{G}$ une famille finie d'événements $\mathcal{G}$ deux à deux indépendants, pour tout $A \in \mathcal{G}$, et réciproquement.

8) a: Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, pour tout événement B , on a:

$$P(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n \cap B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) P(B)$$

b: $(X=x)_{x \in \mathcal{X}(X)}$ est un système complet d'événements, donc pour tout $g \in \mathcal{Y}(Y)$

$$P(Y=g) = \sum_{x \in \mathcal{X}(X)} \underbrace{P(X=x, Y=g)}_{\text{commune}}$$

de même pour X .

c: (i) Soit $m \in \mathbb{N}$.

$(X_n = i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ est un système complet d'événements.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall i \in \{1, \dots, N\}, P(X_m = i) &= \sum_{j=1}^N P(X_m = j) P_{(X_m=j)}(X_m = i) \\ &= \sum_{j=1}^N [V_m]_{j,i} [M_m]_{i,j} \\ &= [M_m V_m]_{i,i} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } V_{m+1} = M_m V_m$$

(ii) Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
 [M_m^T U]_{i,j} &= \sum_{k=1}^m [M_m^T]_{i,k} [U]_{k,j} \\
 &= \sum_{k=1}^m [M_m]_{k,i} \\
 &= \sum_{k=1}^m P_{(X_m=i)}(X_{m-1}=k) \\
 &= \sum_{k=1}^m \frac{P(X_m=i, X_{m-1}=k)}{P(X_m=i)} \\
 &= \frac{1}{P(X_m=i)} \sum_{k=1}^m P(X_m=i, X_{m-1}=k) \\
 &= 1 \text{ par la formule des probabilités totales.}
 \end{aligned}$$

immédiat car $((X_{m-1}=k))_{k \in E_1}$ s.d.
est une s.c. des événements "passé-complet"
d'invariants pour la probabilité $P_{(X_m=i)}$.

donc $M_m^T U = 1 \times U$ et $U \in \mathcal{O}_{m,s}$

donc $\|1 \in \mathcal{G}_p(M_m^T)\|$

de plus, $\chi_{M_m} = \det(XI_m - M_m) = \det((XI_m - M_m)^T) = \det(XI_m - M_m^T) = \chi_{M_m^T}$

donc $\mathcal{G}_p(M_m) = \mathcal{G}_p(M_m^T)$

donc $\|1 \in \mathcal{G}_p(M_m)\|$

II) Variables aléatoires discrètes

1) a: il faut déterminer $\chi(x)$ et $P(X=x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}(X)$.

b: On a $\mathcal{X}(X) = \overline{\{X \in \mathbb{N}\}}$

donc $P(X=+\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)$

2) a: sur l'intervalle ouvert de convergence, $G_X(x) = E(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) e^{inx}$

b: On a $R \geq 1$

de plus, G_X est définie au minimum dans $[-1;1]$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)$ converge.

G_X est continue sur $[-1;1]$ et $\mathbb{C}^\infty$ sur $]-1;1[$. (+ dérivables borne à borne positive car $\sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) < +\infty$)

$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{m \in \mathcal{X}(X)} P(X=m) = 1$

c: après (3)

3) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$, $X \sim \mathcal{B}(p)$ Puisque:

$\mathcal{X}(X) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

$$- E(X) = p, \quad V(X) = p(1-p) \quad \text{et} \quad G_X: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 1-p-pt \end{cases}$$

• Loi binomiale de paramètres $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ lorsque:

$$- X(\Omega) = \{0, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$- \text{Si } X \sim \mathcal{B}(n, p), \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p) \quad \text{et} \quad G_X: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (1-p+pt)^n \end{cases}$$

- situation type: on répète n épreuves de Bernoulli indépendantes et X donne le nombre de succès
 la même probabilité de succès p

• Loi uniforme sur un ensemble fini et non vide E ; $X \sim \mathcal{U}(E)$ lorsque:

$$- X(\Omega) = E, \quad \forall x \in E, \quad P(X=x) = \frac{1}{\text{card}(E)}$$

- Si $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, m\})$ avec $m \in \mathbb{N}^*$:

$$- E(X) = \frac{m+1}{2}, \quad V(X) = \frac{m^2-1}{12} \quad \text{et} \quad G_X: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{m} & \frac{1-t}{1-t} \text{ si } t \leq 1 \\ \frac{t}{m} & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{cases}$$

• Loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ lorsque:

$$- X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = (1-p)^{n-1} p$$

$$- \text{Si } X \sim \mathcal{G}(p), \quad E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \text{et} \quad G_X: \begin{cases}]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p}[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{pt}{1-t} \end{cases}$$

$q = 1-p$

- situation type: on répète une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et X donne le rang du 1^{er} succès.
 la même probabilité de succès p

• Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque:

$$- X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad P(X=m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

$$- \text{Si } X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda \quad \text{et} \quad G_X: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\lambda(t-1)} \end{cases}$$

2) a: $- \forall m \in \mathbb{N} \quad P(X=m) = \frac{G_X^{(m)}(0)}{m!}$

- Connaissant G_X , on peut la développer en série entière

donc $\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / G_X(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^m$

par unicité des coefficients des séries entières, $\forall m \in \mathbb{N}, P(X=m) = a_m$
 (ce qui nous permet de reconnaître la fonction génératrice d'une loi variable.)

4) - Soient $X \perp\!\!\!\perp Y$, $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

En faisant le produit de Cauchy de G_X et G_Y on exprime G_{X+Y} de la forme

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m t^m \quad \text{et } \forall m \in \mathbb{N} \quad c_m = P(X+Y=m)$$

on a produit des fonctions entières
 donc on établit 2.c)

- On a $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\forall m \in \mathbb{N}, (X+Y=m) = \bigcup_{k=0}^m (X=k) \cap (Y=m-k)$$

Les $(X=k) \cap (Y=m-k)$ sont 2-à-2 incompatibles, et $X \perp\!\!\!\perp Y$

donc $P(X+Y=m) = \sum_{k=0}^m P(X=k)P(Y=m-k)$ (on reconnaît le produit de Cauchy)

5) a) - $\forall m \in \mathbb{N}, (X \geq m) = \bigcup_{k=m}^{+\infty} (X=k)$

Les $(X=k)$ sont 2-à-2 incompatibles, $P(X \geq m) = \sum_{k=m}^{+\infty} P(X=k)$

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, (X \geq m) &= (X \geq m) \cap (X \leq m) \\ &= (X \geq m) \cap \overline{(X > m)} \\ &= (X \geq m) \cap \overline{(X \geq m+1)} \\ &= (X \geq m) \setminus (X \geq m+1) \end{aligned}$$

d'où $P(X=m) = P(X \geq m) - P(X \geq m+1)$

b) On note $M = \max(X, Y)$, $N = \min(X, Y)$

On a $M(\Omega) = N(\Omega) = \mathbb{N}$,

- $\forall m \in \mathbb{N}, (M \leq m) = (X \leq m) \cap (Y \leq m)$ et $(N \geq m) = (X \geq m) \cap (Y \geq m)$

$(X \geq m) = (X \in [m; +\infty[)$ et $(X \leq m) = (X \in]-\infty; m])$ et de même pour Y .
 Les $(X \geq m)$ et $(Y \geq m)$ sont indépendants ainsi que $(X \leq m)$ et $(Y \leq m)$.

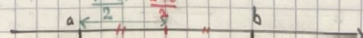
Pour le point précédent on peut déterminer $P(M=m)$ et $P(N=m)$

On peut compléter :

$$\min(X, Y) = \frac{X+Y}{2} - \frac{|X-Y|}{2}$$

$$\max(X, Y) = \frac{X+Y}{2} + \frac{|X-Y|}{2}$$

schématiquement pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:



1) Ainsi, avec 5), on peut déterminer $(M=m)$ et $(N=n)$.

On peut aussi étudier la covariance (M,N) et utiliser 2b)

6) Pour l'espérance:

pour en déduire les bits marginaux (cf exemple 9 p7 du cours).

- Si: $X(n) \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ on peut toujours définir l'espérance même dans ce cas, $E(X) \in \mathbb{R}$.

- Si: $\sum_{x \in X(n)} |x| P(X=x)$ doit être sommable i.e. $\sum_{x \in X(n)} |x| P(X=x) < +\infty$

dans ce cas, on pose $E(X) = \sum_{x \in X(n)} x P(X=x)$

On dit alors que X est d'espérance finie

Pour la variance, si X^2 est d'espérance finie, on a:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

7) Si: $X \geq 0$, $E(X) > 0$ (positivité de l'espérance)

i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

Ainsi, $V(X) \geq 0$

On a $V(X) = 0 \iff X$ est constante presque sûrement.

Si: $E(X) = 0$, X est dite centric.

Si on suppose de plus $X \geq 0$ alors $(X=0)$ est presque sûr
i.e. $P(X=0) = 1$.

8) - Calculer $\sum_{m=0}^{+\infty} m P(X=m)$

- Calculer $\sum_{m=0}^{+\infty} P(X \geq m)$

- Noter que G_X est dérivable en 1, dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$

9) a: Avec le théorème du transfert, $E(X^2) = \sum_{x \in X(n)} x^2 P(X=x)$

X^2 est d'espérance finie ($\iff \sum_{x \in X(n)} x^2 P(X=x) < +\infty$)

b: Pour la formule d'Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$

10) - Si X est d'espérance finie, aX l'est aussi et $E(aX) = aE(X)$

linéarité
de l'espérance

- Si: X et Y sont d'espérances finies, $X+Y$ l'est aussi et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- Si: X est d'espérance finie, $aX+b$ l'est aussi et $E(aX+b) = aE(X)+b$

- Si: les $(X_k)_{k=1,2,\dots}$ sont d'espérances finies, $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ l'est aussi et $E\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k E(X_k)$

- Si: X et Y sont d'espérances finies et indépendantes, XY est d'espérance finie et $E(XY) = E(X)E(Y)$

• G: X^1 et Y^1 sont d'espérances finies ($|X|, |Y|$) et d'espérance finie et $E((X^1)^2) < E(Y^1)$

• G: les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont d'espérances finies et indépendantes, $\prod_{k=1}^m X_k$ est d'espérance finie et $E(\prod_{k=1}^m X_k) = \prod_{k=1}^m E(X_k)$

• G: X a une variance, aX aussi et $V(aX) = a^2 V(X)$

• G: X et Y ont une variance, $X+Y$ aussi et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$

• G: X a une variance, $aX+b$ également et $V(aX+b) = a^2 V(X)$

• G: les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ont une variance, $\sum_{k=1}^m X_k$ aussi et on a:

$$V\left(\sum_{k=1}^m X_k\right) = \sum_{k=1}^m V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m V(X_k) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

- si elles sont 2-à-2 indépendantes, $V\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m V(X_i)$

• G: les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ont une variance, $\sum_{k=1}^m a_k X_k$ aussi et on a:

$$V\left(\sum_{k=1}^m a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^m a_k^2 V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

- si elles sont 2-à-2 indépendantes, $V\left(\sum_{k=1}^m a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^m a_k^2 V(X_k)$

• G: X a une variance, $\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$

• G: X et Y ont une variance, $\operatorname{cov}(aX+b, Y) = a \operatorname{cov}(X, Y) + b \operatorname{cov}(1, Y) = a \operatorname{cov}(X, Y)$

• G: les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ont une variance, $\operatorname{cov}\left(\sum_{k=1}^m a_k X_k, \sum_{k=1}^m b_k Y_k\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i b_j \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$

11) a: G: $f(X(n)) \subset [0; +\infty]$ on peut toujours définir $E(f(X))$

- Si on il faut que $\left(\sum_{x \in X(n)} f(x) P(X=x)\right)$ soit sommable. i.e. $\sum_{x \in X(n)} f(x) P(X=x) < +\infty$

dans ces cas, $E(f(X)) = \sum_{x \in X(n)} f(x) P(X=x)$

b: On pose $f: x \mapsto k(1+x)$, soit $X \sim \mathcal{BD}(n, x)$

$$E(f(X)) = E(X + X^2) = E(X) + E(X^2) = nx + V(X) + E(X)^2 = nx + n(1-x) + n^2 x^2$$

donc $E(f(X)) = nx(2-x+nx)$

Par le théorème du transfert, $E(f(X)) = \sum_{k=0}^n k(k+1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$d) \text{ si } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(1-x)^k x^{n-k} = np(1-x)^{n-1}$$

• Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $X \sim g(1-x)$

$$E(P(X)) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x+1}{(1-x)^2}$$

Par le théorème du transfert, $E(P(X)) = \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} (1-x)$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\left(e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right| = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1 < +\infty$$

Donc Φ est définie sur $\mathbb{R}$. (on peut utiliser le théorème du transfert)

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{it} \lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

12) - On a la loi du couple : $\forall (x,y) \in X(n) \times Y(n), P(X=x, Y=y) = P(X=x \cap Y=y)$

- On a les lois marginales de X et Y .

$$\forall x \in X(n), P(X=x) = \sum_{y \in Y(n)} P(X=x, Y=y)$$

$$\forall y \in Y(n), P(Y=y) = \sum_{x \in X(n)} P(X=x, Y=y)$$

On peut aussi définir des lois conditionnelles :

* Loi de X sachant $(Y=y)$ ($y \in Y(n)$ tel que $P(Y=y) > 0$)
 * Loi de Y sachant $(X=x)$ ($x \in X(n)$ tel que $P(X=x) > 0$)

13) - Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}^+$, si X est positive, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

- Inégalité de Tchebichev : Si X est d'écart fini, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

• Loi faible des grands nombres, si :

- $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont iid

- $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ont une variance,

(On note X une variable de même loi que les X_k .)

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^m X_k}{m} - E(X)\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{m\epsilon^2} \quad \text{pu } \sigma^2 = V(X)$$

On utilise une utilisation de ces inégalités, voir l'exemple 22 p 18 du cours.