Probabilités - Sous espaces vectoriel
DM 9

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (0, 1, 2) \text{ et } v_3 = (1, 2, 3).$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2. On pose $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$. Déterminer une base de F et en déduire la dimension de F.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = 0\}.$$

4. Déterminer un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
5. On considère $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + 3y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de G et la dimension de G.
6. Déterminer une base de $F \cap G$ et la dimension de $F \cap G$.

1. On peut résoudre un système ou observer que $v_3 = v_1 + 2v_2$ (on peut le repérer grâce aux zéros dans v_1 et v_2).
   $\boxed{\text{La famille est donc liée.}}$
2. Comme $v_3 \in Vect(v_1, v_2)$, on a $F = Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$.
   Les vecteurs v_1 et v_2 sont non colinéaires, donc forment une famille libre, et c'est donc une base de F, et $\boxed{dim(F) = 2.}$
3. Plusieurs versions possibles :

   Version 1 : avec le premier chapitre sur les espaces vectoriels uniquement On sait que v_1 et v_2 sont dans F, donc si on veut une équation de F, v_1 et v_2 doivent la vérifier. Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} a - c &= 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \\ c &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Avec $c = 1$ par exemple, on obtient comme équation $\boxed{x - 2y + z = 0.}$
   Ainsi, $F \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$.
   Attention : On n'a que l'inclusion ici ! Notons $\tilde{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ Il faut maintenant vérifier l'égalité : soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
   Alors $u \in \tilde{F}$ si et seulement si $x - 2y + z = 0$, si et seulement si $z = -x + 2y$ avec $y, z \in \mathbb{R}^2$
   D'où $u \in \tilde{F}$ si et seulement si $u = (x, y, -x + 2y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, si et seulement si $u \in vect((1, 0, -1), (0, 1, 2))$: on est retombé sur v_1 et v_2, c'est à dire

$$\tilde{F} = F$$

   Ouf !
   D'autre raisonnement du même type sont possibles. Ce qu'il faut avoir en tête, c'est que une fois qu'on a trouvé ce qui semble être l'équation de F, il faut être vérifier si on a travaillé par déduction (ce qui donne une inclusion), ou si on a travaillé par équivalence...

   Version 2 : avec le chapitre sur la dimension finie : Même début que V1, même constatation qu'on n'a que l'inclusion, puis :

   F est de dimension 2, donc $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ est un espace de dimension au moins 2 (puisqu'il inclu F). Comme ce n'est pas $\mathbb{R}^3$ tout entier, c'est forcément de dimension 2. Les deux espaces sont donc de même dimension, avec l'un inclus dans l'autre : ils sont égaux !
   Donc $\boxed{F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}}$

4. On complète la base v_1, v_2, par exemple avec $\boxed{w = (1,0,0)}$

   On vérifie facilement que v_1, v_2, w est libre (le système est très rapide, ou alors on dit que w ne vérifie pas l'équation de F, donc $w \notin Vect(v_1, v_2)$) et constitue donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   Posons $D = Vect(w)$.

   Comme (v_1, v_2, w) est génératrice de $F + D$ et que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, on a $F + D = \mathbb{R}^3$.
   Enfin, il reste à vérifier $F \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui est rapide : $u = (x, y, z) \in F \cap D$ si et seulement si $u = (x, 0, 0)$ avec $x - 2 \times 0 + 0 = 0$, ie $u = (0, 0, 0)$.

   On en déduit donc que $\boxed{Vect(w)}$ est un supplémentaire de F.

   Avec le cours sur la dimension finie : (v_1, v_2, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ donc par juxtaposition des bases, on a $F \oplus D = \mathbb{R}^3$.

5. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Alors

$$u \in G \Leftrightarrow x + 3y + 2z = 0 \Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{R}, u = (-3y - 2z, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$$

   Donc $\boxed{G = Vect((-3, 1, 0), (-2, 0, 1))}$

   Comme ces deux vecteurs sont non colinéaires, ils forment une base de G et $\boxed{dim(G) = 2}$

6. La question 3 nous donne une équation de F qu'on va utiliser pour l'intersection. Sans cette équation, la question est nettement plus difficile....
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + z &= 0 \\ 5y + z &= 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x &= 7y \\ z &= -5y \\ y &\in \mathbb{R} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, u = (7y, y, -5y) \end{aligned}$$

   On a donc $\boxed{F \cap G = Vect((7, 1, -5)).}$ Une base est $(7, 1, -5)$ et la dimension de $F \cap G$ est donc 1.

Exercice 2 :

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. L'information n'a que deux états possibles : "vraie" ou "fausse". Soit $p \in]0, 1[$. A chaque transmission, la probabilité que l'information soit transmise à l'identique d'une personne à l'autre est p, et avec une probabilité $1 - p$, c'est l'état contraire qui est transmis.

Autrement dit, si l'information est vraie pour une personne, il y a une probabilité p pour qu'il la transmette dans son état "vraie", et $1 - p$ pour qu'il la transmette dans son état "fausse". Si l'info était fausse, il y a une probabilité p pour qu'il la transmette encore "fausse", et $1 - p$ pour qu'il la transmette comme vraie.

On note p_n la probabilité de l'événement : l'information après n transmissions est "vraie".

On suppose que l'info était dans son état "vraie" à l'instant initial (ainsi $p_0 = 1$).

1. En utilisant la formule des probabiités totales, déterminez une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. Calculez $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Comment interpréter ce résultat ?

---

1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé qui modélise l'expérience.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons I_n l'événement : "l'information est vraie après la n-ième transmission."
   D'après l'énoncé, on a $P_{I_n}(I_{n+1}) = p$, de même avec $P_{\bar{I_n}}(\overline{I_{n+1}}) = p$
   (l'information ne change pas d'état avec une probabilité p)
   I_n et $\bar{I_n}$ forment un système complet d'événements : on peut appliquer la formule des probabilités totales, et il vient :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(I_{n+1}) &= P(I_n)P_{I_n}(I_{n+1}) + P(\bar{I_n})P_{\bar{I_n}}(I_{n+1}) \\ &= p_n p + (1 - p_n)(1 - p) \\ &= pp_n + 1 - p + p_n(p - 1) = (2p - 1)p_n + (1 - p) \end{aligned}$$

   D'où la relation : $\boxed{p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p)}$.

2. Comme $p \neq 1$, la suite est arithmético géométrique et on cherche α tel que $\alpha = (2p-1)\alpha+1-p$. On trouve $\alpha = \frac{1}{2}$.

   Alors $p_{n+1} - \alpha = (2p-1)(p_n - \alpha)$ donc la suite $(p_n - \frac{1}{2})$ est géométrique de raison $2p-1$ avec $p_0 - \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   Ainsi pour tout n, $\boxed{p_n = (2p-1)^n(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}.}$

3. Comme $0 < p < 1$, alors $0 < 2p < 2$ et $-1 < 2p-1 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}.}$

   A long terme, l'information transmise n'a plus aucune fiabilité : une chance sur deux pour que ce soit son contraire qui soit donné ! Ce résultat est valable quel que soit p (même très proche de 1). Pire : le fait que ce soit du type géométrique fait que l'info est très vite perdue (la suite est décroissante rapidement).... C'est le principe du jeu du "téléphone arabe" ou "passe parole", où un message, pourtant de complexité raisonnable, est transmis oralement de joueur en joueur. Chaque joueur doit la répéter le plus fidèlement possible à son voisin. Le message finit invariablement très déformé à l'arrivée....