Espaces vectoriels - Probabilités
DM 10

Première partie : sous espaces vectoriels et matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminez les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. On notera λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs obtenues.
2. Pour tout $i \in \{1; 2\}$, on note E_i l'ensemble défini par :

$$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}); AX = \lambda_i X\}$$

Montrez, pour chaque $i \in \{1; 2\}$, que E_i est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donnez une base de E_i, et la dimension de E_i.

3. On pose maintenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
   a) Quel lien entre P et la question précédente ?
   b) Montrez que P est inversible et calculez P^{-1}.
   c) Vérifiez que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs obtenues à la question 1.
4. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Je vous épargne le calcul et on donne, pour la suite de l'exercice, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie : des probabilités et des suites

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës, notées, A, B et C.
A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements de la mouche suivent le protocole suivant :

- Si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n + 1$.
- Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, elle y reste à l'instant $n + 1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$, ou elle va dans la pièce A ou la pièce C de façon equiprobable.

Pour tout entier n, on définit l'événement A_n : "la mouche est dans la pièce A à l'instant n".
On définit de la même façon les événements B_n et C_n.
Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

1. Exprimez pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des nombres a_n, b_n et/ou c_n.
   ATTENTION : ceci est une question de probabilité : je demande donc une justification propre, avec tout ce qu'il faut d'événements, de formules... bref, des maths quoi ;-)
2. Montrez que la suite (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont on précisera b_0, b_1 et la relation liant b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   On ne cherchera pas à déterminer cette suite avec le polynôme caractéristique
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$
   a) Vérifiez que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice de la première partie.
   b) Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^nU_0$
   c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
   d) Déterminez les expressions de a_n et c_n.
   e) Calculez les limites de chacune de ces suites

Première partie

1. On a $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, donc $det(A - \lambda I_2) = ((\frac{1}{2} - \lambda)(-\lambda) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}$.
   On voit que 1 est racine évidente. L'autre racine est donc $-\frac{1}{2}$ puisque le produit doit donner $-\frac{1}{2}$
   Ainsi, $\boxed{A - \lambda I_2 \text{ est non inversible si et seulement si } \lambda \in \{-\frac{1}{2}, 1\}}$
2. On peut montrer à part le côté "sev" :
   Notons déjà que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_i$ puisque $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Soient maintenant X_1 et X_2 dans E_i. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$.
   Alors $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = \alpha\lambda_i X_1 + \beta\lambda_i X_2$
   Donc $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \lambda_i(\alpha X_1 + \beta X_2)$, autrement dit $\alpha X_1 + \beta X_2 \in E_i$.
   Ainsi E_i et bien un sous espace vectoriel.
   Mais on peut aussi y aller directement :
   Par exemple avec λ_1 :

Soit une matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$X \in E_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= x \\ x-2y &= y \end{cases} \Leftrightarrow (...) x = y \text{ et } y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

Autrement dit $E_1 = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Un calcul analogue donne $E_2 = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$.

3. a) On observe que les colonnes de P sont les bases trouvées à la questions précédentes. Certainement un hasard complet...
   b) Un miroir rapide ou la formule pour les matrices 2×2 donne
$$P^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   c) C'est un calcul tout simple et on trouve
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
4. a) C'est une récurrence qu'on a déjà faite plusieurs fois (cf les corrigés précédents pour le détail) et qu'il faut bien sûr rédiger sur votre copie. Comme D est diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.... et je vous ai pré-mâché le travail !

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événement.
   Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :
$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$
   D'après le protocole précisé dans l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ (la mouche revient dans B si elle est dans A) et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ (la mouche ne passe pas de la pièce C à la pièce A directement).
   Enfin, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ puisqu'elle doit aller en A ou en C "de façon équiprobable", et qu'il y a déjà une probabilité de $1/2$ qu'elle reste en B.
   Ainsi il ne reste que $P(A_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})$, c'est à dire
$$\boxed{a_{n+1} = \frac{b_n}{4}}$$
   On justifie de la même façon les autres relations :
$$\boxed{b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n, \text{ et } c_{n+1} = \frac{b_n}{4}}$$
2. Comme $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n$, on a $b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{2} + c_{n+1}$. En remplaçant avec les formules donnant a_{n+1} et c_{n+1}, il vient :
   $b_{n+2} = \frac{b_n}{4} + \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_n}{4}$
   et finalement
$$\boxed{b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{b_n}{2}}$$
   L'énoncé dit que la mouche est, à l'instant 0, dans la salle B. Donc $\boxed{b_0 = 1}$, $a_0 = 0$ et $c_0 = 0$.
   Comme $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n$, on en déduit $\boxed{b_1 = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}}$.

3. a) On a bien, d'après ce qu'on vient de dire à la question précédente :

$$U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule AU_n et on obtient $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

Or

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{b_n}{2}$$

, donc $AU_n = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$

On obtient la relation demandée.

b) Par récurrence, montrons que $U_n = A^n U_0$:
On a bien $U_0 = A^0 U_0$ vu que $A^0 = I_2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^n U_0$.
Alors $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$
La formule est bien héréditaire.
Conclusion : la formule est initialisée et est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $U_n = A^n U_0$

ATTENTION : même si c'est effectivement comme une suite géométrique, ce n'est pas à proprement parlé le cas : on est ici avec une suite de matrice, avec une "raison" qui serait une matrice. Il faut rédiger rapidement la récurrence...

c) On obtient donc

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\frac{1}{2} - 1) \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (\frac{1}{2} - 1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

D'où $b_n = \frac{1}{3}(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n)$

d) On sait déjà que $a_0 = 0$. De plus, on a $a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$ donc pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{b_{n-1}}{4} = \frac{1}{12}(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1})$$

Remarquons que la formule obtenue fonctionne aussi pour $n = 0$, la puissance $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ devant -2 pour $n = 0$.

De même on trouve $c_n = \frac{1}{12}(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1})$

e) Comme $|-\frac{1}{2}| < 1$, on a $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim a_n = \frac{1}{6}$, $\lim b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim c_n = \frac{1}{6}$.