
DEVOIR SURVEILLÉ 6 - 19/03/25 - Durée 4h
Sujet 1 - Type CCINP

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 : ÉTUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE SUR UN TRIANGLE

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

On note également : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

- Q1.** Calculer les nombres p_n , q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Q2.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
- Q3.** En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n , q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q4.** Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A}_n \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

- Q5.** Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et le nombre $E(X_1 + \dots + X_n)$.
- Q6.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Q7.** En déduire une expression de a_n .

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

- si le pion ne passe jamais en B , on pose $T_B = 0$;
- sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B .

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

- Q8.** Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.
- Q9.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B}_n$ en fonction de A_n et C_n .
- Q10.** Établir que $P(B_3 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_1) = \frac{1}{4}P(\overline{B}_2 \cap \overline{B}_1)$, puis en déduire que $P(B_3 | \overline{B}_2 \cap \overline{B}_1) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^n \overline{B}_k\right) = \frac{1}{4}.$$

- Q11.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?
- Q12.** Justifier que la variable aléatoire T_B est d'espérance finie. Quelle est l'espérance de T_B ?

EXERCICE 2 : UN JEU DE SOCIÉTÉ

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A .

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
2. sinon, on pose $T = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geq A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Q14. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Q15. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q16. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

Q17. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q19. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Q20. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

Q21. Calculer $P(T = 0)$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum_{k \geq A} P(T = k) x^k$ sur son intervalle de convergence.

Q22. Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum_{k \geq A} P(T = k) x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x} \right)^A.$$

Q23. En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leq M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leq k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^k \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Q24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M - 1))$, montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k P(S_n \leq k - \ell).$$

Q25. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket, \quad P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n \geq 0} P(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n).$$

Q26. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

EXERCICE 3 : APPROXIMATION D'UNE RACINE CARRÉE PAR LA MÉTHODE DE HÉRON

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice M .

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \frac{1}{2} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1. Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Q27. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q29. Dédurre des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2. Majoration de l'erreur

Q30. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right).$$

Q31. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on dit que B est une racine carrée de A .

Q32. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geq 0$.

Q33. Étudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

Q34. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Q35. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S .

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

On note $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère également la partie C_P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$C_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+\}.$$

Q36. Vérifier que $I_n \in C_P$. Montrer que si $M \in C_P$, alors M est une matrice inversible et on a :

$$\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_P.$$

La question précédente implique que l'on peut définir la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_P par :

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_k = \frac{1}{2}(U_{k-1} + SU_{k-1}^{-1}).$$

On considère également la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $V_k = P^{-1}U_kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q37. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_k en fonction de D et V_{k-1} .
En déduire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

où f_k est la fonction définie dans la partie I de cet exercice.

On considère l'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(B) = \sqrt{\text{Tr}(BB^T)}.$$

On admet que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q38. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.

Q39. En déduire à l'aide de la question **Q31** que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité :

$$N(R - U_k) \leq \frac{\text{Tr}(S) + n}{2^k}.$$

Q40. Conclure que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers R .

FIN