CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 6 - Sujet 1

Exercice 1 : *CCINP PC 2019*

Q1. • Comme pour $n = 0$, le pion se trouve sur le point A, on a $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
• D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2$ et $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 1/4$ donc, comme $\Omega = A_0$, on a :

$$p_1 = P(A_1) = P(A_0 \cap A_1) = P(A_0)P_{A_0}(A_1) = 1 \times 1/2 = 1/2$$
$$q_1 = P(B_1) = P(A_0 \cap B_1) = P(A_0)P_{A_0}(B_1) = 1 \times 1/4 = 1/4$$
$$r_1 = P(C_1) = P(A_0 \cap C_1) = P(A_0)P_{A_0}(C_1) = 1 \times 1/4 = 1/4.$$

$$\boxed{p_0 = 1,\ q_0 = r_0 = 0,\ p_1 = \frac{1}{2} \text{ et } q_1 = r_1 = \frac{1}{4}.}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, on a :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2 \text{ et } P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4.$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), on a :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}(q_n + r_n).$$

Cette formule reste valable si p_n, q_n ou r_n est nul.
En procédant de même avec les événements B_{n+1} et C_{n+1}, on obtient :

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}(p_n + r_n) \text{ et } r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}(p_n + q_n).$$

On en déduit que :

$$MV_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2p_n + q_n + r_n \\ p_n + 2q_n + r_n \\ p_n + q_n + 2r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = MV_n.}$$

Q3. • Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^nV_0$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$, donc on a bien $M^0V_0 = I_3V_0 = V_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $V_n = M^nV_0$.
Alors $V_{n+1} = MV_n \underset{HR}{=} MM^nV_0 = M^{n+1}V_0$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_n = M^nV_0.}$$

• Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_n = M^nV_0 = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n + 2 \\ 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{\begin{cases} p_n = \dfrac{1}{3\cdot 4^n}(4^n+2) \\ q_n = r_n = \dfrac{1}{3\cdot 4^n}(4^n-1). \end{cases}}$$

Q4. On a donc $p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3\cdot 4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ et $q_n = r_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3\cdot 4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ (puisque $4>1$).

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}.}$$

On peut l'interpréter ainsi :

$\boxed{\text{après un grand nombre d'étapes, les trois emplacements sont quasiment équiprobables.}}$

Q5.

$\boxed{X_1+\ldots+X_n \text{ représente le nombre de passage du pion en } A \text{ entre l'étape 1 et l'étape } n.}$

$\boxed{E(X_1+\ldots+X_n) \text{ représente le nombre moyen de passages du pion en } A \text{ entre l'étape 1 et l'étape } n.}$

Q6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli (puisque $X_n(\Omega)=\{0,1\}$) de paramètre $P(A_n)=p_n$ donc :

$$\boxed{X_n \text{ est d'espérance finie et } E(X_n) = p_n.}$$

Q7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Par linéarité de l'espérance, $X_1+\ldots+X_n$ est d'espérance finie et on a :

$$\begin{aligned} a_n = E(X_1+\ldots+X_n) &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 4^k}\right) \quad \text{(d'après la question 3.)} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{(1/4)-(1/4)^{n+1}}{1-(1/4)} = \frac{n}{3}+\frac{2}{9}(1-(1/4)^n) \quad \text{(somme géométrique avec } \frac{1}{4}\neq 1). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{n}{3}+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).}$$

Q8. Comme le pion se trouve en A à l'étape 0, on a :

$$(T_B=1) = B_1 \text{ donc } P(T_B=1) = q_1 = 1/4$$

et :

$$(T_B=2) = (A_1\cap B_2)\cup(C_1\cap B_2)$$

donc comme les événements $A_1\cap B_2$ et $C_1\cap B_2$ sont incompatibles, on a :

$$P(T_B=2) = P(A_1\cap B_2)+P(C_1\cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2)+P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

$$\boxed{P(T_B=1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(T_B=2) = \frac{3}{16}.}$$

Q9. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\overline{B_n} = A_n\cup C_n$ car (A_n,B_n,C_n) est un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \overline{B_n} = A_n\cup C_n.}$$

Q10. On a $\overline{B_2}\cap\overline{B_1}=(A_2\cup C_2)\cap\overline{B_1}=(A_2\cap\overline{B_1})\cup(C_2\cap\overline{B_1})$ donc :

$$\begin{aligned}
P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1}) &= P\big((B_3\cap A_2\cap\overline{B_1})\cup(B_3\cap C_2\cap\overline{B_1})\big)\\
&= P(B_3\cap A_2\cap\overline{B_1})+P(B_3\cap C_2\cap\overline{B_1}) \quad \text{(événements incompatibles)}\\
&= P(A_2\cap\overline{B_1})P_{A_2\cap\overline{B_1}}(B_3)+P(C_2\cap\overline{B_1})P_{C_2\cap\overline{B_1}}(B_3)\\
&= P(A_2\cap\overline{B_1})\times\frac{1}{4}+P(C_2\cap\overline{B_1})\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}\big(P(A_2\cap\overline{B_1})+P(C_2\cap\overline{B_1})\big)\\
&= \frac{1}{4}P\big((A_2\cap\overline{B_1})\cup(C_2\cap\overline{B_1})\big) \quad \text{(événements incompatibles)}\\
&= \frac{1}{4}P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $P(B_3\,|\,\overline{B_2}\cap\overline{B_1})=\dfrac{P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1})}{P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})}=\dfrac{1}{4}$ (on a bien $P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})\neq 0$ car par exemple $A_1\cap A_2\subset\overline{B_1}\cap\overline{B_2}$ et $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ donc $P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})\geqslant\dfrac{1}{4}$).

$$\boxed{P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1})=\frac{1}{4}P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1}) \text{ et } P(B_3\,|\,\overline{B_2}\cap\overline{B_1})=\frac{1}{4}.}$$

Q11. • Pour tout $k\geqslant 3$, on a :

$$(T_B=k)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k$$

donc d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
P(T_B=k) &= P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k)\\
&= P(\overline{B_1})\times\prod_{i=1}^{k-2}P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_i}}(\overline{B_{i+1}})\times P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)\\
&= \frac{3}{4}\times\prod_{i=1}^{k-2}\big(1-P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_i}}(B_{i+1})\big)\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{3}{4}\times\prod_{i=1}^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $k=1$ et $k=2$ d'après les expressions trouvées en 8. donc on a :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(T_B=k)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.}$$

• Comme $(T_B=k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a :

$$P(T_B=0)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_B=k)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=0 \quad \text{(série géométrique de raison } 3/4\in]-1,1[\text{).}$$

$$\boxed{P(T_B=0)=0 \text{ donc l'événement } [T_B=0] \text{ est négligeable : le pion passe presque sûrement en } B.}$$

Q12. On remarque que $T_B\hookrightarrow\mathscr{G}(1/4)$.
Ainsi, par le cours :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } T_B \text{ est d'espérance finie et on a } E(T_B)=\tfrac{1}{1/4}=4.}$$

Exercice 2 : *CCINP PC 2023*

Q13. La variable aléatoire X_n représente le nombre généré par l'ordinateur au tour de jeu numéro n, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{le nombre de cases dont le pion avance au tour de jeu numéro } n.}$$

La variable aléatoire S_n représente le nombre de cases dont a avancé le pion après n tours de jeu, ou encore :

$$\boxed{\text{le numéro de la case où se trouve le pion après } n \text{ tours de jeu}}.$$

Q14. La variable aléatoire T est le nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A (pour la première fois), c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{le nombre de tours nécessaire pour que le jeu se termine}}$$

(T prend par convention la valeur 0 lorsque le jeu ne se termine jamais).

Q15. En tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,1[$,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$$

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathscr{P}(p) : \text{« } \forall x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \text{ ».}$$

Initialisation : Pour $p = 0$, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}}$.
Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
On a donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(p)}(x) = p!(1-x)^{-p-1}$.
Par dérivation, on obtient pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x) = p! \times (-1) \times (-p-1)(1-x)^{-p-2} = \frac{p!(p+1)}{(1-x)^{p+2}} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.}$$

Q16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, on pose $a_n = \binom{n}{p}$.
On a pour tout $n \geqslant p$, $a_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit par la règle de d'Alembert que :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^n \text{ est } \tfrac{1}{1} = 1.}$$

Q17. On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série géométrique).
Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient en dérivant p fois :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}.$$

Par la question 15, on en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

d'où, en multipliant par $\dfrac{x^p}{p!}$:

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.}$$

Q18. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi uniforme sur $\{0,1\}$ qui est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Ces variables étant de plus indépendantes, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ suit la loi binômiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

Q19. Comme le pion avance d'au plus une case à chaque tour de jeu, il faut au moins A tours de jeu pour atteindre la case A.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Si pour tout $i \in [\![1,k-A]\!]$, X_i prend la valeur 0 et pour tout $i \in [\![k-A+1,k]\!]$, X_i prend la valeur 1 alors T prend la valeur k.
Comme de plus, T peut prendre la valeur 0, par exemple lorsque pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i prend la valeur 0 (car le pion reste toujours sur la case 0), on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire } T \text{ est } T(\Omega) = \{k \in \mathbb{N},\ k \geqslant A\} \cup \{0\}.}$$

Q20. Comme le pion se déplace ici de 0 ou 1 case à chaque tour de jeu, l'événement $(T = k)$ se réalise si et seulement si le pion atteint la case A pour la première fois au tour de jeu numéro k. Pour cela, il faut et il suffit que le pion se trouve sur la case $A-1$ au tour de jeu numéro $k-1$ et qu'il se déplace d'une case au tour de jeu numéro k, ce qui est équivalent à la réalisation de l'événement $(S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)$.
Ainsi :

$$\boxed{(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1).}$$

Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $S_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} X_i$ et X_k sont indépendantes donc les événements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants et on a alors :

$$P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1) \times P(X_k = 1) = \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

En effet, si $k-1 = 0$ alors nécessairement, $A-1 = 0$ donc dans ce cas, on a

$$P(S_{k-1} = A-1) = P(\Omega) = 1 = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}}$$

et si $k-1 \in \mathbb{N}^*$ alors d'après la question 18, $S_{k-1} \sim \mathscr{B}(k-1, \frac{1}{2})$ et $A-1 \in [\![0,k-1]\!]$) donc on a :

$$P(S_{k-1} = A-1) = \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{A-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(k-1)-(A-1)} = \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.}$$

Q21. Comme $((T=k))_{k\in T(\Omega)}$ est un système (quasi-)complet d'événements, on a $\sum_{k\in T(\Omega)} P(T=k)=1$ donc :

$$P(T=0)=1-\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}=1-\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2}\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}\frac{(1/2)^{A-1}}{(1-1/2)^{(A-1)+1}}$$

en utilisant la question 17 avec $p=A-1$ et $x=\dfrac{1}{2}$.
Ainsi :

$$P(T=0)=1-\frac{(1/2)^A}{(1/2)^A}=1-1=0.$$

$$\boxed{P(T=0)=0 \text{ donc l'événement } (T=0) \text{ est négligeable, le jeu s'arrête presque sûrement.}}$$

Q22. Pour tout $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geqslant A$, on pose $b_k=\dbinom{k-1}{A-1}\dfrac{1}{2^k}$.
On a pour tout $k\geqslant A$, $b_k\neq 0$ et :

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|=\frac{k!}{(A-1)!(k-A+1)!}\times\frac{(A-1)!(k-A)!}{(k-1)!}\frac{1}{2}=\frac{k}{k-A+1}\frac{1}{2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

On en déduit par la règle de d'Alembert que :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{k\geqslant A} P(T=k)x^k \text{ est } R_T=\tfrac{1}{1/2}=2.}$$

Pour tout $x\in]-2,2[$, on a :

$$G_T(x)=\sum_{k=A}^{+\infty}P(T=k)x^k=\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k=\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=A-1}^{+\infty}\binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{x}{2}\frac{(x/2)^{A-1}}{(1-x/2)^A}$$

en utilisant la question 17 avec $p=A-1$ et $\dfrac{x}{2}\in]-1,1[$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x\in]-2,2[,\ G_T(x)=\frac{(x/2)^A}{(1-x/2)^A}=\left(\frac{x}{2-x}\right)^A.}$$

Q23. En tant que somme d'une série entière, la fonction G_T est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $]-R_T,R_T[$ et $1\in]-R_T,R_T[$ donc G_T est dérivable en 1.
Par le cours, on en déduit que T est d'espérance finie et on a $E(T)=G_T'(1)$.
Or, pour tout $x\in]-2,2[$, on a :

$$G_T'(x)=\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\times A\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1} \quad \text{donc } G_T'(1)=2A.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le nombre moyen de tours de jeu pour terminer la partie est égal à } E(T)=2A.}$$

Q24. Soit $k\in[\![0,A-1]\!]$. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $((X_{n+1}=\ell))_{\ell\in X_{n+1}(\Omega)}=\big((X_{n+1}=0),\dots,(X_{n+1}=M-1)\big)$, on a :

$$P(S_{n+1}\leqslant k)=\sum_{\ell=0}^{M-1}P((X_{n+1}=\ell)\cap(S_{n+1}\leqslant k))=\sum_{\ell=0}^{M-1}P((X_{n+1}=\ell)\cap(S_n\leqslant k-\ell))$$

car $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
Or, par le lemme des coalitions, les variables aléatoires X_{n+1} et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sont indépendantes donc pour tout $\ell \in [\![0, M-1]\!]$, les événements $(X_{n+1} = \ell)$ et $(S_n \leqslant k - \ell)$ sont indépendants d'où :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P(X_{n+1} = \ell) P(S_n \leqslant k - \ell) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \frac{1}{M} P(S_n \leqslant k - \ell).$$

Enfin, comme S_n ne prend que des valeurs positives, si $k - \ell < 0$ c'est-à-dire lorsque $\ell > k$ alors $P(S_n \leqslant k - \ell) = 0$ donc on a par la relation de Chasles ($k \leqslant A - 1 \leqslant M - 1$) :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \left(\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell) + \sum_{\ell=k+1}^{M-1} 0 \right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell).}$$

Q25. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n} \text{ »}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $S_1 = X_1 \sim \mathscr{U}([\![0, M-1]\!])$.
Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. Comme $(S_1 \leqslant k) = \bigcup_{i=0}^{k} (S_1 = i)$, union d'événements 2 à 2 incompatibles, on a :

$$P(S_1 \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} P(S_1 = i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{M} = \frac{k+1}{M} = \frac{1}{M^1} \binom{1+k}{1}$$

(car pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $i \in [\![0, M-1]\!]$). Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. On a par la question précédente :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k - \ell) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n} \binom{n+k-\ell}{n}$$

par hypothèse de récurrence car pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$, $k - \ell \in [\![0, A-1]\!]$.
En utilisant le résultat annoncé en début de partie, on obtient :

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M^{n+1}} \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } k \in [\![0, A-1]\!],\ P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.}$$

Q26. Soit $n \in \mathbb{N}$.
L'événement $(S_n < A)$ se réalise si et seulement si le pion n'a pas encore atteint la case numéro A au tour de jeu numéro n c'est-à-dire si et seulement si le pion atteint la case A strictement après n tours de jeu ou s'il ne l'atteint jamais.
On a donc l'égalité :

$$\boxed{(S_n < A) = (T > n) \cup (T = 0) \text{ et en particulier, } (T > n) \subset (S_n < A).}$$

Les événements $(T > n)$ et $(T = 0)$ étant incompatibles, on a alors :

$$P(S_n < A) = P(T > n) + P(T = 0).$$

Étudions la série $\sum_{n\geqslant 0} P(S_n < A)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(S_n < A) = P(S_n \leqslant A-1) = \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n} = \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1}$$

par symétrie des cœfficients binômiaux.
Pour $n = 0$, on a $P(S_0 < A) = P(\Omega) = 1 = \dfrac{1}{M^0}\dbinom{0+A-1}{A-1}$ donc la formule est encore valable.
On a donc :

$$\sum_{n\geqslant 0} P(S_n < A) = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+A-1}{A-1}\frac{1}{M^n} = \sum_{\ell\geqslant A-1}\binom{\ell}{A-1}\frac{1}{M^{\ell-A+1}}.$$

Comme $\frac{1}{M} \in]-1,1[$, on en déduit par les questions 16 et 17 que la série $\sum_{\ell\geqslant A-1}\dbinom{\ell}{A-1}\dfrac{1}{M^\ell}$ converge et a pour somme $\dfrac{(1/M)^{A-1}}{(1-1/M)^A}$.

Par produit par $\frac{1}{M^{1-A}}$, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(S_n < A)$ converge et a pour somme $\left(\dfrac{M}{M-1}\right)^A$.

D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P(T = 0) \leqslant P(S_n < A)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(S_n < A) = 0$ en tant que terme général d'une série convergente. Par passage à la limite, on obtient $P(T = 0) = 0$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T > n) = P(S_n < A)$.
Ainsi, T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} P(T > n)$ converge et a pour somme $\left(\dfrac{M}{M-1}\right)^A$ donc par le résultat rappelé dans l'énoncé, on peut conclure que :

$$\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = \left(\frac{M}{M-1}\right)^A.}$$

Exercice 3 : *CCINP PC 2021*

Q27. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\left(f_k(x)\right)^2 - x &= \frac{1}{4}\left(\left(f_{k-1}(x)\right)^2 + \frac{x^2}{\left(f_{k-1}(x)\right)^2} + 2x\right) - \frac{4x}{4}\\ &= \frac{1}{4}\left(\left(f_{k-1}(x)\right)^2 + \frac{x^2}{\left(f_{k-1}(x)\right)^2} - 2x\right) = \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\left(f_k(x)\right)^2 \geqslant x \geqslant 0$ donc par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $|f_k(x)| \geqslant \sqrt{x}$.
Or d'après l'énoncé, on a de plus $f_k(x) \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \geqslant \sqrt{x}.}$$

Q28. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$.
On a :

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}\left(-f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{x - \left(f_{k-1}(x)\right)^2}{f_{k-1}(x)}.$$

Or, par la question précédente, on a $x-\left(f_{k-1}(x)\right)^2 \leqslant 0$ (on a bien $k-1 \in \mathbb{N}^*$) et par l'énoncé, $f_{k-1}(x) > 0$ donc $f_k(x) - f_{k-1}(x) \leqslant 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(f_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

Q29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
La suite $\left(f_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (d'après Q28) et minorée (par $\sqrt{x}$ d'après Q27) donc elle converge vers une limite que l'on note $f(x)$.
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) \geqslant 0$, on obtient par passage à la limite dans l'inégalité : $f(x) \geqslant 0$.
On a de plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_{k-1}(x)f_k(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_{k-1}(x)\right)^2 + \dfrac{1}{2}x$ donc par passage à la limite (on a aussi $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{k-1}(x) = f(x)$ par décalage d'indice), on obtient :

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 + \frac{1}{2}x \text{ d'où } \left(f(x)\right)^2 = x \text{ donc } |f(x)| = \sqrt{x}.$$

Comme $f(x) \geqslant 0$, on en déduit que $f(x) = \sqrt{x}$.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge sur } \mathbb{R}_+ \text{ vers la fonction } f : x \mapsto \sqrt{x}.}$$

Q30. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{f_k(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - \sqrt{x} = f_{k+1}(x) - \sqrt{x}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right).}$$

Q31. On sait déjà par Q27 que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x) - \sqrt{x} \geqslant 0$ donc $|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) - \sqrt{x}$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1+x}{2^k}$.
Initialisation : Pour $k = 1$, on a $f_1(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_0(x) + \dfrac{x}{f_0(x)}\right) = \dfrac{1+x}{2}$.
On a donc $f_1(x) - \underbrace{\sqrt{x}}_{\geqslant 0} \leqslant f_1(x) = \dfrac{1+x}{2^1}$.
Donc l'inégalité est bien vérifiée pour $k = 1$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1+x}{2^k}$.
On a $1 - \underbrace{\dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)}}_{\geqslant 0} \leqslant 1$ donc par produit par le réel positif $\dfrac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}$, on obtient par la question Q30 puis par hypothèse de récurrence :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(f_k(x) - \sqrt{x}) \leqslant \frac{1}{2}\frac{1+x}{2^k} = \frac{1+x}{2^{k+1}}.$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $k+1$.
Par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ |f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}.}$$

Q32. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que A admet une racine carrée. Alors il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
On a alors par les propriétés du déterminant :

$$\det(A) = \det(B^2) = (\underbrace{\det(B)}_{\in\mathbb{R}})^2 \geqslant 0.$$

$$\boxed{\text{Si } A \text{ admet une racine carrée alors } \det(A) \geqslant 0.}$$

Q33. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\det(A) = 0 \geqslant 0$.
S'il existe $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ alors on a :

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2+bc = 0 \end{cases}.$$

D'après la ligne 2, on a $a+d \neq 0$ et donc d'après la ligne 3, on a $c = 0$.
On a alors d'après les lignes 1 et 4, $a = 0$ et $d = 0$ donc $a+d = 0$ ce qui donne une contradiction.
On en déduit par l'absurde que la matrice A n'admet pas de racine carrée.

$$\boxed{\text{La réciproque de la question 32. est donc fausse en général.}}$$

Q34. La matrice S est une matrice symétrique réelle donc :

$$\boxed{\text{d'après le théorème spectral, } S \text{ est (orthogonalement) diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q35. Comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = P^T$, donc

$$R^T = (P\Delta P^{-1})^T = (P\Delta P^T)^T = (P^T)^T\Delta^T P^T = P\Delta P^T = R$$

donc R est symétrique.
De plus, on a :

$$R^2 = (P\Delta \underbrace{P^{-1})(P}_{=I_n}\Delta P^{-1}) = P\Delta\Delta P^{-1} = PDP^{-1} = S.$$

Ainsi :

$$\boxed{R \text{ est une matrice symétrique et une racine carrée de } S.}$$

Q36. On a $I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1}I_nP = I_n$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. Ainsi : $\boxed{I_n \in C_P.}$
Soit $M \in C_p$.
La matrice M est semblable à la matrice $P^{-1}MP$ donc elles sont les mêmes valeurs propres.
En tant que matrice diagonale, les valeurs propres de la matrice $P^{-1}MP$ sont ses cœfficients diagonaux et on sait qu'ils sont tous strictement positifs. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de $P^{-1}MP$ et donc n'est pas valeur propre de M.
Cela signifie que la matrice M est inversible.
De plus, on a $\frac{1}{2}(M+SM^{-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(\frac{1}{2}(M+SM^{-1})\right)P &= \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}SM^{-1}P\right) = \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}(PDP^{-1})M^{-1}P\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + D(P^{-1}MP)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Par suite, en notant $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ (car $M \in C_P$) on a

$$P^{-1}\left(\frac{1}{2}(M+SM^{-1})\right)P = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n^{-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 + \frac{\lambda_1}{a_1}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{2}(a_n + \frac{\lambda_n}{a_n}) \end{pmatrix}$$

et cette matrice est bien diagonale avec des cœfficients diagonaux tous strictement positifs car pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{2}\left(a_i + \dfrac{\lambda_i}{a_i}\right) \geqslant \dfrac{a_i}{2} > 0$ car $\lambda_i \geqslant 0$ et $a_i > 0$.
On a donc bien $\dfrac{1}{2}(M+SM^{-1}) \in C_P$.

$$\boxed{\text{Si } M \in C_P \text{ alors } M \text{ est inversible et } \frac{1}{2}(M+SM^{-1}) \in C_P.}$$

Q37. On a :

$$\begin{aligned} V_k = P^{-1}U_kP = P^{-1}\left(\frac{1}{2}(U_{k-1}+SU_{k-1}^{-1})\right)P &= \frac{1}{2}P^{-1}U_{k-1}P + \frac{1}{2}P^{-1}SU_{k-1}^{-1}P \\ &= \frac{1}{2}P^{-1}U_{k-1}P + \frac{1}{2}P^{-1}(PDP^{-1})U_{k-1}^{-1}P = \frac{1}{2}P^{-1}U_{k-1}P + \frac{1}{2}D(P^{-1}U_{k-1}P)^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ V_k = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1}).}$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

Initialisation : Comme $f_0 : x \mapsto 1$ et $V_0 = P^{-1}U_0P = P^{-1}I_nP = I_n$, on a bien :

$$V_0 = \begin{pmatrix} f_0(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_0(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \frac{1}{2}(V_k + DV_k^{-1}) \quad \text{(d'après le premier point avec } k+1 \in \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}^{-1}\right) \quad \text{(par l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(f_k(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{f_k(\lambda_1)}\right) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{2}\left(f_k(\lambda_n) + \frac{\lambda_n}{f_k(\lambda_n)}\right) \end{pmatrix} \quad \text{(calcul matriciel avec des matrices diagonales)} \\ &= \begin{pmatrix} f_{k+1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_{k+1}(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad \text{(par définition de } f_{k+1}). \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}.}$$

Q38. Comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = P^T$.
De plus, on a $V_k = P^{-1}U_kP = P^TU_kP$ et $\Delta = P^{-1}RP = P^TRP$ donc $\Delta - V_k = P^T(R-U_k)P$.
Ainsi :

$$(\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T = (P^T(R-U_k)P)(P^T(R-U_k)P)^T = P^T(R-U_k)\underbrace{PP^T}_{=I_n}(R-U_k)^TP = P^{-1}(R-U_k)(R-U_k)^TP.$$

On en déduit que les matrices $(\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T$ et $(R-U_k)(R-U_k)^T$ sont semblables donc elles sont la même trace.
Ainsi :

$$N(\Delta - V_k) = \sqrt{\mathrm{Tr}((\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T)} = \sqrt{\mathrm{Tr}((R-U_k)(R-U_k)^T)} = N(R-U_k).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ N(\Delta - V_k) = N(R-U_k).}$$

Q39. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
N(R-U_k) = N(\Delta - V_k) &= \sqrt{\mathrm{Tr}((\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}^T\right)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \left(\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1)\right)^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \left(\sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n)\right)^2 \end{pmatrix}\right)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i))^2} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i})^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\underbrace{(f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i})}_{\geqslant 0}\underbrace{(f_k(\lambda_j) - \sqrt{\lambda_j})}_{\geqslant 0}} \\
&= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i})\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i}) \quad \text{(car cette quantité est positive)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1+\lambda_i}{2^k} = \frac{n + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{2^k} \\
&= \frac{n + \mathrm{Tr}(D)}{2^k} = \frac{n + \mathrm{Tr}(S)}{2^k},
\end{aligned}$$

car S et D sont semblables donc elles ont la même trace.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ N(R-U_k) \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(S) + n}{2^k}.}$$

Q40. Comme $\lim_{k \to +\infty} \frac{n + \mathrm{Tr}(S)}{2^k} = 0$, on obtient par le théorème de limite par encadrement (car une norme est toujours positive) : $\lim_{k \to +\infty} N(R - U_k) = 0$. Cela signifie que :

$$\boxed{\text{la suite } (U_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } R}$$

(pour la norme N, mais comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, la convergence ne dépend pas de la norme choisie).