

DEVOIR SURVEILLÉ 6 - 19/03/25 - *Durée 4h*
Sujet 2 - Type Centrale

Calculatrice autorisée

Ce sujet est divisé en trois parties.

- Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur \mathbb{Z} qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.
- Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.
- Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

I. Étude d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z}

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probablisé et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \quad \text{où } p \in]0, 1[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans \mathbb{Z} d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec une probabilité $1 - p$, les sauts étant indépendants et p appartenant à $]0, 1[$.

Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$.

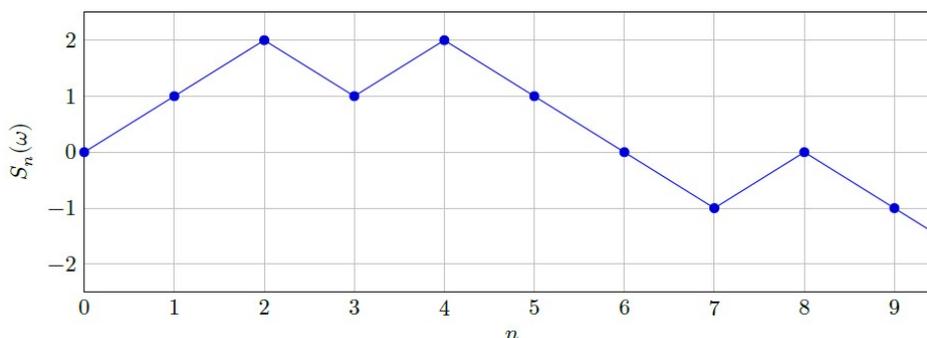


Figure 1 – Exemple de trajectoire possible

I.A - Espérance et variance de S_n

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.

Soit Y_n la variable aléatoire sur Ω égale au nombre de valeurs de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $X_k = 1$.

Q 1. Quelle est la loi de Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de Y_n .

Q 2. Quelle relation a-t-on entre S_n et Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de S_n . Justifier que S_n et n ont même parité.

I.B - Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur m tout m -uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \gamma_i \in \{-1, 1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket, s_\gamma(k) = \sum_{i=1}^k \gamma_i$.

On représente le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, s_\gamma(k) \geq 0$;
- on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.

La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

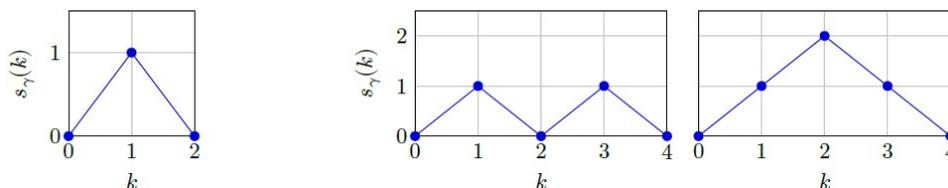


Figure 2 – Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

Q 3. Donner sans démonstration la valeur de C_3 et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n+2$. Soit $r = \max\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid s_\gamma(2i) = 0\}$. On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1})$.

Q 4. Justifier à l'aide d'une figure que $\gamma_{2r+1} = 1, \gamma_{2n+2} = -1$ et que α et β sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ un chemin de longueur m .

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket, X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^m (X_{t+k} = \gamma_k).$$

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $P(A_{t,\gamma})$ en fonction de n et p .

Soit T la variable aléatoire, définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{N} , égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 6. Montrer que T prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(T = 2n + 2) = 2C_n p^{n+1} (1-p)^{n+1}$.

I.C - Série génératrice des nombres de Catalan

Q 7. En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^n C_r C_{n-r}.$$

Q 8. À l'aide de la variable aléatoire T , montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

Q 9. En déduire que la série entière $\sum_{n \geq 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad \text{et} \quad g(t) = 2t f(t).$$

On rappelle que la série génératrice de T , donnée par $G_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

Q 10. À l'aide des questions précédentes, exprimer G_T à l'aide de g et de $P(T=0)$.

Q 11. En déduire que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors T est d'espérance finie.

Q 12. Montrer que $\forall t \in I, g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.

Q 13. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1-4t}.$$

Q 14. Montrer que ε est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$. En déduire

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}.$$

Q 15. En déduire que $P(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Q 16. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors T n'est pas d'espérance finie.

I.D - Expression des nombres de Catalan et équivalent

Q 17. Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n à l'aide d'un coefficient binomial.

Q 18. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Q 19. Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 20. À partir de la question précédente, retrouver le résultat des questions 11 et 16.

II. Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \left((X^{i-1} | X^{j-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \dots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \dots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \dots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}.$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

II.A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow (P_i | P_j) = 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n .
(« unitaire » signifie ici de coefficient dominant égal à 1)

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q 21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (V_0, V_1, \dots, V_n) est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Q 22. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n | P) = 0$.

Q 23. Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = V_n$.

II.B - Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n + 1$ suivante :

$$G'_n = \left((V_{i-1}|V_{j-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}.$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ la matrice de la famille (V_0, V_1, \dots, V_n) dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 24. Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.

Q 25. Montrer que $Q_n^T G'_n Q_n = G'_n$, où Q_n^T est la transposée de la matrice Q_n .

Q 26. En déduire que $\det G_n = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2$.

III. Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur $\mathbb{R}[X]$ et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

III.A - Produit scalaire

Q 27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$ converge.
On pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2 \theta$.

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad (P|Q) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Q 28. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.B - Système orthogonal

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $U_0 = 1$, $U_1 = X - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = (X - 2)U_{n+1} - U_n$.

Q 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est unitaire de degré n , et déterminer la valeur de $U_n(0)$.

Q 30. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(4 \cos^2 \theta) \sin(\theta) = \sin((2n + 1)\theta)$.

Q 31. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin((2m + 1)\theta) \sin((2n + 1)\theta) d\theta$.

Q 32. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| = 1$.

Pour calculer la valeur de $(U_m|U_n)$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2 \theta$.

III.C - Application

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = (X^n|1)$.

Q 33. À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2 \times 4^n}{\pi} \int_0^1 x^{n-3/2} (1-x)^{3/2} dx = \frac{3}{2n-1} \mu_n.$$

Q 34. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.

Q 35. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det(C_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \ddots & \ddots & & \ddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}.$$

III.D - Un autre déterminant de Hankel

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \ddots & \ddots & & \ddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Q 36. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Montrer $(D_n|X^k) = 0$.

Q 37. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = U_n$, puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur du déterminant H'_n .

FIN