**CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 6 - Sujet 2**

*Centrale PC 2021 Mathématiques 1*

# I. Etude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

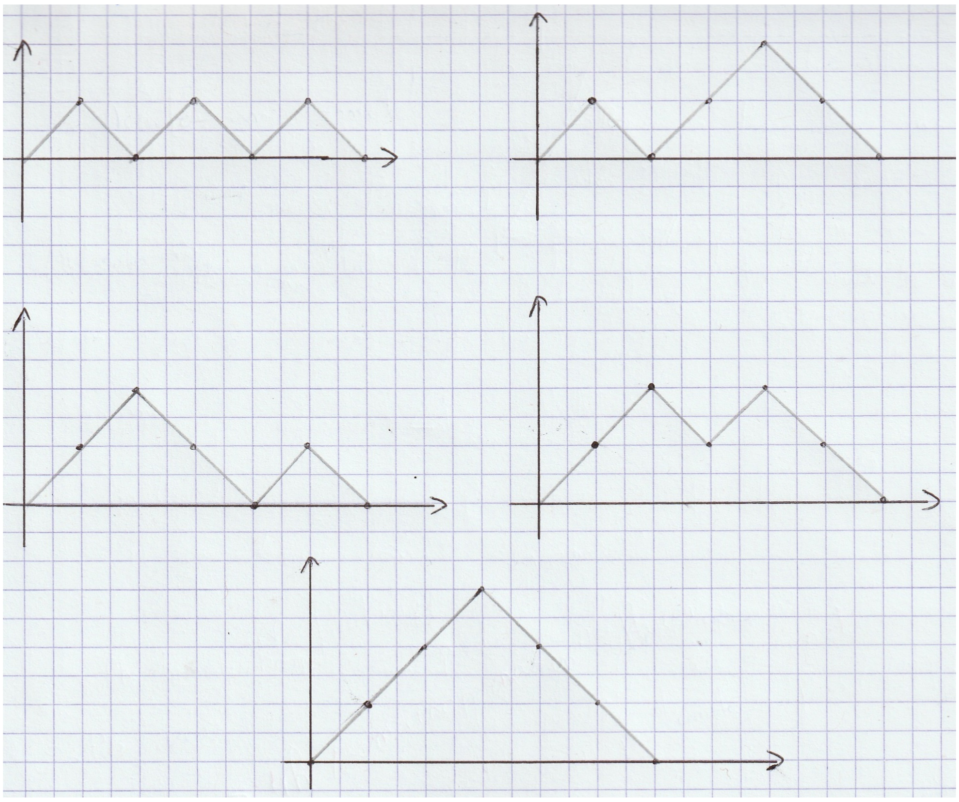
## I.A - Espérance et variance de $S_n$

1. $Y_n$ compte, au cours de $n$ expériences indépendantes (car les $X_k$ sont indépendantes), le nombre de succès (avoir $X_k$ qui prend la valeur 1), chaque expérience amenant un succès avec la même probabilité $p$, donc $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   On a donc $Y_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
   Par suite, $Y_n$ admet une espérance et une variance et
$$E(Y_n) = np \quad \text{et} \quad V(Y_n) = np(1-p).$$

2. • Pour tout $\omega \in \Omega$,
$$\begin{aligned} S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) &= \sum_{\substack{k=1 \\ X_k(\omega)=1}}^{n} 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ X_k=-1}}^{n} (-1) \\ &= Y_n(\omega) \times 1 + (n - Y_n(\omega)) \times (-1) = 2Y_n(\omega) - n, \end{aligned}$$
   donc $S_n = 2Y_n - n$.
   • Par suite, comme $Y_n$ admet une espérance et une variance, $S_n = 2Y_n - n$ (de la forme $aY_n + b$) admet aussi une espérance et une variance et
$$E(S_n) = 2E(Y_n) - n = 2np - n = (2p-1)n \quad \text{(par linéarité de l'espérance)}$$
   et
$$V(S_n) = 2^2 V(Y_n) = 4np(1-p).$$
   • On a montré que, pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \underbrace{2Y_n(\omega)}_{\text{pair}} - n$, donc $S_n$ et $n$ ont la même parité.

## I.B - Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

3. On a $C_3 = 5$. Voici une représentation des 5 chemins de Dyck de longueur 6 :



4. • Par définition de $r$, on a $s_\gamma(2r)=0$. De plus, comme $\gamma$ est un chemin de Dyck, on a $s_\gamma(2r+1)\geq 0$.
Or $s_\gamma(2r+1)=s_\gamma(2r)+\gamma_{2r+1}$, donc on a $\gamma_{2r+1}\geq 0$ et, comme $\gamma_{2r+1}\in\{-1,1\}$, on a $\gamma_{2r+1}=1$.
• De même, comme $\gamma$ est un chemin de Dyck de longueur $2n+2$, on a $s_\gamma(2n+2)=0$. De plus, comme $\gamma$ est un chemin de Dyck, on a $s_\gamma(2n+1)\geq 0$.
Or $s_\gamma(2n+1)=s_\gamma(2n+2)-\gamma_{2n+2}$, donc on a $\gamma_{2n+2}\leq 0$ et, comme $\gamma_{2n+2}\in\{-1,1\}$, on a $\gamma_{2n+2}=-1$.
• Par suite, on a $s_\gamma(2r+1)=s_\gamma(2n+1)=1$. De plus, pour tout $i\in[\![1,2n-2r]\!]$,

$$s_\beta(i)=\sum_{k=1}^{i}\beta_k=\sum_{k=1}^{i}\gamma_{2r+1+k}=\sum_{k=2r+2}^{2r+1+i}\gamma_k=s_\gamma(2r+1+i)-s_\gamma(2r+1)=s_\gamma(2r+1+i)-1.$$

Or par définition de $r$, on a $s_\gamma(k)>0$ pour tout $k\in[\![2r+1,2n]\!]$ (évident pour les $k$ pairs, et $s_k=0$ est impossible pour $k$ impair (problème de parité)), donc $s_\gamma(k)\geq 1$, et on a encore $s_\gamma(2n+1)=1\geq 1$, donc, pour tout $i\in[\![1,2n-2r]\!]$,

$$s_\beta(i)=s_\gamma(2r+1+i)-1\geq 0.$$

Enfin, $s_\beta(2n-2r)=s_\gamma(2r+1+2n-2r)-1=s_\gamma(2n+1)-1=0$.
$\beta$ est donc bien un chemin de Dyck de longueur $2n-2r$.
• Pour tout $i\in[\![1,2r]\!]$,

$$s_\alpha(i)=\sum_{k=1}^{i}\alpha_k=\sum_{k=1}^{i}\gamma_k=s_\gamma(i)\geq 0\quad(\text{car }\gamma\text{ est un chemin de Dyck})$$

et, par définition de $r$, on a

$$s_\alpha(2r)=s_\gamma(2r)=0,$$

donc $\alpha$ est bien un chemin de Dyck de longueur $2r$.

5. Comme $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{2n})$ est un chemin de Dyck de longueur $2n$, $J=\{k\in[\![1,2n]\!]:\gamma_k=1\}$ est de cardinal $n$ (ainsi que $[\![1,2n]\!]\setminus J=\{k\in[\![1,2n]\!]:\gamma_k=-1\}$), car

$$0=s_\gamma(2n)=\sum_{k=1}^{2n}\gamma_k=\sum_{\substack{k=1\\k\in J}}^{2n}1+\sum_{\substack{k=1\\k\notin J}}^{2n}(-1)=\mathrm{Card}(J)+(2n-\mathrm{Card}(J))\times(-1)=2\mathrm{Card}(J)-2n.$$

Par suite, pour tout $t\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}P(A_{t,\gamma})&=P\left(\bigcap_{k=1}^{m}(X_{t+k}=\gamma_k)\right)\\&=\prod_{k=1}^{m}P(X_{t+k}=\gamma_k)\quad(\text{car les }X_i\text{ sont indépendantes})\\&=\prod_{\substack{k=1\\k\in J}}^{2n}P(X_{t+k}=\gamma_k)\times\prod_{\substack{k=1\\k\notin J}}^{2n}P(X_{t+k}=\gamma_k)\\&=\prod_{\substack{k=1\\k\in J}}^{2n}P(X_{t+k}=1)\times\prod_{\substack{k=1\\k\notin J}}^{2n}P(X_{t+k}=-1)\quad(\text{par définition de }J)\\&=\prod_{\substack{k=1\\k\in J}}^{2n}p\times\prod_{\substack{k=1\\k\notin J}}^{2n}(1-p)\\&=p^{\mathrm{Card}(J)}\times(1-p)^{2n-\mathrm{Card}(J)}=(p(1-p))^n.\end{aligned}$$

6. • D'après la question 2, $S_n$ et $n$ ont la même parité, donc, pour avoir $S_n=0$ (pair), on doit avoir $n$ pair. D'où,
— s'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $S_n(\omega)=0$, alors $\{k\in\mathbb{N}^*:S_k(\omega)=0\}\subset(2\mathbb{N}^*)$ et est non vide, donc $T(\omega)=\min\{k\in\mathbb{N}^*:S_k(\omega)=0\}$ est pair ;
— s'il n'existe pas $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $S_n(\omega)=0$, alors, par définition, $T(\omega)=0$ est pair.
Dans tous les cas, $T(\omega)$ est pair, donc on a bien $T(\Omega)\subset 2\mathbb{N}$.
• Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\omega\in\Omega$ tel que $T(\omega)=2n+2$. Alors, par définition de $T$, on a

$$S_{2n+2}(\omega)=0\quad\text{et}\quad\forall k\in[\![1,2n+1]\!],\quad S_k(\omega)\neq 0.$$

Par suite, on a $(\forall k\in[\![1,2n+1]\!],\ S_k(\omega)>0)$ ou $(\forall k\in[\![1,2n+1]\!],\ S_k(\omega)<0)$, donc, en posant $\gamma=(X_1(\omega),\dots,X_{2n+2}(\omega))$, on a $\gamma$ ou $-\gamma$ qui est un chemin de Dyck de longueur $2n+2$.
Comme de plus $S_k(\omega)\neq 0$ pour tout $k\in[\![1,2n+1]\!]$, on peut montrer comme à la question 4 que :
— si $X_1(\omega)=1$, alors $T(\omega)=2n+2$ si et seulement si $(X_2(\omega),\dots,X_{2n+1}(\omega))$ est un chemin de Dyck et $X_{2n+2}(\omega)=-1$ (car $S_k(\omega)$ ne s'annule pas pour tout $k\in[\![1,2n+1]\!]$)
— si $X_1(\omega)=-1$, alors $T(\omega)=2n+2$ si et seulement si $(-X_2(\omega),\dots,-X_{2n+1}(\omega))$ est un chemin de Dyck et $X_{2n+2}(\omega)=1$ (car $S_k(\omega)$ ne s'annule pas pour tout $k\in[\![1,2n+1]\!]$)

D'où, en notant $D_n$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$ (on a $\operatorname{Card}(D_n) = C_n$), on a, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = 1, X_1 = -1)$,

$$\begin{aligned}
P(T = 2n+2) &= P(X_1 = 1 \cap T = 2n+2) + P(X_1 = -1 \cap T = 2n+2)\\
&= P(X_1 = 1 \cap (X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n \cap X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = 1 \cap -(X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n \cap X_{2n+2} = 1)\\
&= P(X_1 = 1)P((X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n)P(X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = 1)P(-(X_2, \dots, X_{2n+1}) \in D_n)P(X_{2n+2} = 1)\\
&\qquad \text{(car } X_1, X_2, \dots, X_{2n+2} \text{ sont indépendantes)}\\
&= P(X_1 = 1)P\left(\bigcup_{\gamma \in D_n} (X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})\right)P(X_{2n+2} = -1)\\
&\qquad + P(X_1 = 1)P\left(\bigcup_{\gamma \in D_n} -(X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})\right)P(X_{2n+2} = 1)\\
&= P(X_1 = 1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P((X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}))\right)P(X_{2n+2} = -1)\\
&\qquad + P(X_1 = 1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P(-(X_2, \dots, X_{2n+1}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}))\right)P(X_{2n+2} = 1) \quad \text{(incompatibles)}\\
&= P(X_1 = 1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P(A_{1,\gamma})\right)P(X_{2n+2} = -1) + P(X_1 = 1)\left(\sum_{\gamma \in D_n} P(A_{1,-\gamma})\right)P(X_{2n+2} = 1)\\
&= p\left(\sum_{\gamma \in D_n} (p(1-p))^n\right)(1-p) + (1-p)\left(\sum_{\gamma \in D_n} (p(1-p))^n\right)p\\
&\qquad \text{(car les calculs faits à la question 5 sont facilement adaptables au cas où } -\gamma \text{ est un chemin de Dyck)}\\
&= p(1-p)C_n(p(1-p))^n + (1-p)pC_n(p(1-p))^n = 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}.
\end{aligned}$$

### I.C - Série génératrice des nombres de Catalan

7. D'après la question 4, si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ est un chemin de Dyck, alors, en posant $r = \max\{i \in [\![0, n]\!] : s_\gamma(2i) = 0\}$, on a

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \text{ et } (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \text{ sont des chemins de Dyck et } \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1.$$

Réciproquement, si

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \text{ et } (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \text{ sont des chemins de Dyck et } \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1,$$

alors $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ est un chemin de Dyck.
On a donc, en notant $D_n$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$ (et en considérant que $D_0 = \{()\}$ a pour seul élément la suite vide, ce qui est cohérent avec la convention $C_0 = 1$),

$$D_{n+1} = \bigcup_{r=0}^{n} \{(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2}) : (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \in D_r, (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \in D_{n-r}, \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1\},$$

où cette réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \operatorname{Card}(D_{n+1})\\
&= \sum_{r=0}^{n} \operatorname{Card}(\{(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2}) : (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r}) \in D_r, (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1}) \in D_{n-r}, \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2n+2} = -1\})\\
&= \sum_{r=0}^{n} (\operatorname{Card}(D_r) \times \operatorname{Card}(D_{n-r}) \times 1 \times 1)\\
&= \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}.
\end{aligned}$$

8. Comme les événements $[T = 2n+2]$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles, par $\sigma$-additivité, on obtient que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(T = 2n+2)$ converge.
Or, pour $p = 1/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T = 2n+2) = \dfrac{2C_n}{4^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_n}{4^n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

9. Posons $f_n : t \in [-1/4, 1/4] \mapsto C_n t^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [-1/4, 1/4]$,

$$|f_n(t)| = C_n |t|^n \leq \frac{C_n}{4^n},$$

donc $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \dfrac{C_n}{4^n}$, et on a même égalité car $|f_n(1/4)| = \dfrac{C_n}{4^n}$.

Or, d'après la question précédente, $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{C_n}{4^n}$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $I = [-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}]$.

10. Comme $T(\Omega) \subset 2\mathbb{N}$, on a $P(T = n) = 0$ pour tout $n$ impair, donc, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
G_T(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = 2n)t^{2n} \\
&= P(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = 2n + 2)t^{2n+2} \\
&= P(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}t^{2n+2} \\
&= P(T = 0) + 2 \times (p(1-p)t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (p(1-p)t^2)^n \\
&= P(T = 0) + 2g(p(1-p)t^2).
\end{aligned}$$

11. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} C_n t^n$ est au moins égal à $1/4$ d'après la question 9.

Or, pour tout $t \in ]0, 1[$, $0 < p(1-p) \leq 1/4$ et $p(1-p) = 1/4$ si et seulement si $p = 1/2$ (se prouve en étudiant les variations de la fonction $p \mapsto p(1-p)$ sur $]0, 1[$), donc pour tout $t \in [0, \sqrt{\dfrac{1/4}{p(1-p)}}]$, comme $p(1-p)t^2 \in [0, 1/4]$, $\sum\limits_{n\geq 0} C_n (p(1-p)t^2)^n$ converge, donc le rayon de convergence de $G_T$ est au moins égal à $\sqrt{\dfrac{1/4}{p(1-p)}} > 1$ pour $p \neq 1/2$.

Par suite, pour $p \neq 1/2$, $G_T$ est dérivable en 1, donc $T$ admet une espérance.

12. Pour tout $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}
g(t)^2 = 4t^2(f(t))^2 &= 4t^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n\right)^2 \\
&= 4t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}\right) t^n \quad \text{(produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)} \\
&= 4t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} t^n \quad \text{(d'après la question 7)} \\
&= 4t \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} t^{n+1} = 4t \sum_{n=1}^{+\infty} C_n t^n \\
&= 4t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n - C_0\right) = 4t(f(t) - 1) = 4tf(t) - 4t = 2g(t) - 4t.
\end{aligned}$$

13. Pour tout $t \in I$, $g(t)$ est donc une racine du trinôme $X^2 - 2X + 4t = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 16t^2 = 4(1 - 4t) \geq 0$. Les racines de ce trinôme sont donc

$$X_1(t) = \frac{2 + \sqrt{\Delta}}{2} = 1 + \sqrt{1 - 4t} \quad \text{et} \quad X_2(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t},$$

ce qui assure l'existence d'une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}$$

(où $\varepsilon(t) = \pm 1$ selon que $g(t) = X_1(t)$ ou $X_2(t)$).

14. • On a, pour tout $t \in I \setminus \{\dfrac{1}{4}\}$,

$$\varepsilon : t \mapsto \frac{g(t) - 1}{\sqrt{1 - 4t}} = \frac{2tf(t) - 1}{\sqrt{1 - 4t}},$$

donc $\varepsilon$ est continue sur $I \setminus \{\dfrac{1}{4}\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ($f$ est continue sur $I$ comme somme d'une série de fonctions continues normalement convergente sur $I$).

• $\varepsilon$ est donc constante sur $I \setminus \{\dfrac{1}{4}\}$, car, s'il existe $t_0$ et $t_1 \in I \setminus \{\dfrac{1}{4}\}$ tels que $\varepsilon(t_0) = -1$ et $\varepsilon(t_1) = 1$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait $t_2 \in [t_0, t_1] \subset I \setminus \{1/4\} = [-1/4, 1/4[$ tel que $\varepsilon(t_2) = 0$ (car $0 \in [-1, 1] = [\varepsilon(t_0), \varepsilon(t_1)]$), ce qui est exclu car $\varepsilon : [-1/4, 1/4[ \to \{\pm 1\}$.

Par suite, $\varepsilon : t \in [1/4, 1/4[ \mapsto -1$ ou $\varepsilon : t \in [1/4, 1/4[ \mapsto 1$.
Or $\varepsilon(0) = \dfrac{g(0)-1}{\sqrt{1-4\times 0}} = -1$ donc $\varepsilon : t \in [1/4, 1/4[ \mapsto -1$ et

$$\forall t \in [-1/4, 1/4[, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1-4t} = 1 - \sqrt{1-4t}.$$

Enfin, pour $t = 1/4$, $g(1/4)$ est racine de $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc $g(1/4) = 1 = 1 - \sqrt{1 - 4\times 1/4}$, donc l'égalité est encore valable pour $t = 1/4$ et, par suite,

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}.$$

15. • Par construction de la série génératrice, on a

$$G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 \quad (\text{car } T(\Omega) \subset \mathbb{N}),$$

donc, d'après la question 10,

$$P(T = 0) = G_T(1) - 2g(p(1-p)) = \sqrt{1 - 4p(1-p)} \quad (\text{car } p(1-p) \in I),$$

donc

$$P(T \neq 0) = 1 - P(T = 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}.$$

• Pour $p = 1/2$, on obtient $P(T \neq 0) = 1$, donc, pour $p = 1/2$, l'événement $T \neq 0$ est presque certain, donc on est presque sûr que la particule revienne à son point de départ à un instant donné.

16. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Par les questions 10, 14 et 15, on a alors pour tout $t \in [-1, 1]$ :

$$G_T(t) = P(T = 0) + 2g\left(\frac{1}{4}t^2\right) = 1 - \sqrt{1-t^2}.$$

Étudions alors la dérivabilité de $G_T$ en 1.
On a pour tout $h \in [-2, 0[$, $\dfrac{G_T(1+h) - G_T(1)}{h} = \dfrac{-\sqrt{-h(h+2)}}{h} = \dfrac{\sqrt{h+2}}{\sqrt{-h}} \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, $G_T$ n'est pas dérivable en 1 donc $T$ n'admet pas d'espérance.

## I.D - Expression des nombres de Catalan et équivalent

17. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

donc, en prenant $\alpha = 1/2$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n)}{(n+1)!} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}(-1)(-3)\dots(-(2n-1)) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2.4^n(n+1)}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$

18. On a donc, pour tout $t \in ]-1/4, 1/4[$, comme $-4t \in ]-1, 1[$,

$$\sqrt{1-4t} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-4t)^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}t^{n+1},$$

donc

$$g(t) = 1 - \sqrt{1-4t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}t^{n+1}.$$

Comme on a par ailleurs, pour tout $t \in ]-1/4,1/4[$,

$$g(t) = 2tf(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n t^{n+1},$$

on obtient, par unicité du développement en série entière de $g$ sur $]-1/4,1/4[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

19. L'équivalent de Stirling donne

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi n}^2} \\ &\frac{1}{n}\frac{2^{2n}2\sqrt{\pi n}}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}. \end{aligned}$$

20. • Supposons $p \neq 1/2$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+2)P(T=2n+2) = 4(n+1)C_n(p(1-p))^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{4p(1-p)}{\sqrt{n}}}_{=O(1)}(4p(1-p))^n = O((4p(1-p))^n).$$

Or $\sum\limits_{n\geq 0}(4p(1-p))^n$ converge absolument (série géométrique de raison $4p(1-p) \in ]-1,1[$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0}(2n+2)P(T=2n+2)$ converge absolument, donc $\sum\limits_{k\in T(\Omega)} kP(T=k)$ converge absolument (car $T(\Omega) \subset 2\mathbb{N}$), donc $T$ admet une espérance.
• Supposons $p = 1/2$.
Alors, en reprenant le calcul précédent, on a cette fois, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+2)P(T=2n+2) = 4(n+1)C_n(p(1-p))^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4p(1-p)}{\sqrt{n}}\underbrace{(4p(1-p))^n}_{=1} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (Riemann et $1/2 \leq 1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0}(2n+2)P(T=2n+2)$ diverge, donc $\sum\limits_{k\in T(\Omega)} kP(T=k)$ ne converge pas absolument, donc $T$ n'admet pas d'espérance.

# II. Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

## II.A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

21. La famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ est orthogonale et constituée de polynômes non nuls (car $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal), donc c'est une famille libre. De plus, elle est composée de $(n+1)$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
De plus, elle est orthogonale (car $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal), donc c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

22. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $(V_0, \dots, V_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k V_k$, et on a alors, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$(V_n|P) = \left(V_n \middle| \sum_{k=0}^{n-1} a_k V_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{(V_n|V_k)}_{=0 \text{ car } k\neq n} = 0.$$

23. Les polynômes $V_0$ et $W_0$ sont unitaires et de degré 0 donc nécessairement, $V_0 = W_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les polynômes $W_n$ et $V_n$ sont de degré $n$ et ils sont unitaires donc en posant $P = W_n - V_n$, on a $\deg(P) < n$.
D'après la question précédente, on a alors $(V_n|P) = 0$ et de même $(W_n|P)$ (puisque $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi un système orthogonal).
On a alors $\|W_n - V_n\|^2 = (W_n - V_n|P) = (W_n|P) - (V_n|P) = 0$ d'où $W_n = V_n$.

## II.B - Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

24. Comme $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n$ est unitaire de degré $n$, donc il existe $(a_{0,n}, \dots, a_{n-1,n})$ tels que
$$V_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n} X^k.$$
On a donc
$$Q_n = Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(V_0, \dots, V_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,n} \\ 0 & 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
qui est bien triangulaire supérieure.
De plus, comme $Q_n$ est triangulaire,
$$\det(Q_n) = \prod_{i=0}^{n} q_{i,i} = \prod_{i=0}^{n} 1 = 1.$$

25. Pour simplifier les notations, numérotons les lignes et les colonnes des matrices de 0 à $n$ au lieu de 1 à $n+1$.
Alors on a $(G_n)_{i,j} = (X^i|X^j)$ et, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,
$$\begin{aligned} (G_nQ_n)_{i,j} &= \sum_{\ell=0}^{n} (G_n)_{i,\ell}(Q_n)_{\ell,j} \\ \text{et } (Q_n^TG_nQ_n)_{i,j} &= \sum_{k=0}^{n} (Q_n^T)_{i,k}(G_nQ_n)_{k,j} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} (Q_n^T)_{i,k}(G_n)_{k,\ell}(Q_n)_{\ell,j} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} q_{k,i}(X^k|X^\ell)q_{\ell,j} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} q_{k,i}X^k \Big| \sum_{\ell=0}^{n} q_{\ell,j}X^\ell\right) \quad \text{(par bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= (V_i|V_j) \quad \text{(par définition de la matrice } Q_n) \\ &= (G'_n)_{i,j}. \end{aligned}$$
Ceci étant valable pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]$, on a bien $G'_n = Q_n^TG_nQ_n$.

26. On a $G'_n = Q_n^TG_nQ_n$, donc, par propriété du déterminant,
$$\det(G'_n) = \det(Q_n^T)\det(G_n)\det(Q_n) = (\det(Q_n))^2\det(G_n) = \det(G_n),$$
car $\det(Q_n) = 1$ d'après la question 24.
De plus, comme la famille $(V_0, \dots, V_n)$ est orthogonale, on a, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$,
$$(G_n)_{i,j} = (V_i|V_j) = 0,$$
donc $G'_n$ est diagonale et, par suite,
$$\det G_n = \det(G'_n) = \prod_{i=0}^{n}(G'_n)_{i,i} = \prod_{i=0}^{n}(V_i|V_i) = \prod_{i=0}^{n}\|V_i\|^2.$$

# III. Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

## III.A - Produit scalaire

27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.
$x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$.
On souhaite effectuer le changement de variable $x = \cos^2\theta$.
Posons $\varphi : \theta \mapsto \cos^2\theta$.
La fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(\theta) = -2\cos\theta\sin\theta$.
La dérivée étant strictement négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ sauf en 0 et $\frac{\pi}{2}$ (donc en un nombre fini de points), on en déduit que $\varphi$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Le changement de variable $x = \cos^2\theta$ est donc licite.
On a $\mathrm{d}x = -2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

Lorsque $\theta = 0$ alors $x = 1$ et lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $x = 0$.

Par le théorème de changement de variable, on en déduit que les intégrales $\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ et $\int_{\pi/2}^0 P(4\cos^2\theta)Q(4\cos^2\theta)\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sqrt{\cos^2\theta}}(-2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ sont de même nature (et en cas de convergence, de même valeur).

Or, pour tout $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\begin{aligned}P(4\cos^2\theta)Q(4\cos^2\theta)\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sqrt{\cos^2\theta}}(-2\cos\theta\sin\theta) &= P(4\cos^2\theta)Q(4\cos^2\theta)\frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|}(-2\cos\theta\sin\theta)\\ &= -2P(4\cos^2\theta)Q(4\cos^2\theta)\sin^2\theta \text{ car } \cos\theta > 0, \sin\theta > 0.\end{aligned}$$

La fonction $\theta \mapsto -2P(4\cos^2\theta)Q(4\cos^2\theta)\sin^2\theta$ étant continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\int_0^{\pi/2} P(4\cos^2\theta)Q(4\cos^2\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$ converge (il s'agit d'une intégrale « ordinaire »).

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge.

Remarque : On pouvait aussi dire que comme $x \mapsto P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$, elle est bornée sur $[0,1]$ donc sur $]0,1]$ donc :

$$P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{x}}O(1) = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right).$$

Pour tout $x \in ]0,1]$, $\frac{1}{x^{1/2}} \geq 0$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x$ converge (Riemann et $1/2 < 1$). Donc par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge.

28. — Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $(P|Q)$ est bien définie, à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.
— Pour tout $(P,Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(P|\lambda Q + R) &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)(\lambda Q + R)(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)(\lambda Q(4x) + R(4x))\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx \quad \text{(par linéarité de l'évaluation)}\\ &= \lambda\frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx + \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)R(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx\\ &\qquad \text{(par linéarité, les 2 intégrales étant convergentes)}\\ &= \lambda(P|Q) + (P|R),\end{aligned}$$

donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à droite.
— $(\cdot|\cdot)$ est symétrique par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$ ($P(4x)Q(4x) = Q(4x)P(4x)$).
— $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à droite et symétrique, donc bilinéaire.
— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Pour tout $x \in ]0,1[$, $(P(4x))^2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \geq 0$.

D'où, par positivité de l'intégrale convergente ($1 \geq 0$), on a

$$(P|P) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (P(4x))^2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx \geq 0.$$

De plus, si $(P|P) = 0$, alors, comme $x \mapsto (P(4x))^2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, comme $0 < 1$ et comme $\int_0^1 (P(4x))^2\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx$ converge et vaut 0, on a

$$\forall x \in ]0,1[, \quad (P(4x))^2\underbrace{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}}_{\neq 0} = 0, \qquad \text{donc} \quad P(4x) = 0.$$

$P$ a donc une infinité de racines (tous les éléments de $]0,4[$), donc $P = 0$.
$(\cdot|\cdot)$ est donc défini positif.
$(\cdot|\cdot)$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

## III.B - Système orthogonal

29. • Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$U_n$ est unitaire de degré $n$" $(P_n)$.
**Initialisation :** Comme $U_0 = 1$ et $U_1 = X - 1$, $P_0$ et $P_1$ sont vérifiées.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P_n$ et $P_{n+1}$ vérifiée.
Alors, comme $U_{n+1}$ est unitaire de degré $n+1$, on a $U_{n+1} = X^{n+1} + Q_{n+1}$ où $Q_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$, donc

$$U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n = (X-2)(X^{n+1} + Q_{n+1}) - U_n = X^{n+2} - 2X^{n+1} + \underbrace{XQ_{n+1}}_{\deg \leq n+1} - 2\underbrace{Q_{n+1}}_{\deg \leq n} - \underbrace{U_n}_{\deg = n}$$

est bien unitaire de degré $n+2$. On a bien $P_{n+2}$.
**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n$ est unitaire de degré $n$.
• On a $U_0(0) = 1$, $U_1(0) = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2}(0) = -2U_{n+1}(0) - U_n(0)$, donc la suite $(U_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
Son équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$, qui a pour racine double $-1$.
Il existe donc $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(0) = (an+b)(-1)^n$.
Or $U_0(0) = 1$ et $U_1(0) = -1$, donc on a

$$\begin{cases} b = 1 \\ -(a+b) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(0) = (-1)^n$.

30. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$U_n(4\cos^2\theta)\sin(\theta) = \sin((2n+1)\theta)$" $(P_n)$.
**Initialisation :** Comme $U_0 = 1$, on a $U_0(4\cos^2\theta)\sin(\theta) = \sin(\theta) = \sin((2\times 0+1)\theta)$, donc on a bien $P_0$.
Comme $U_1 = X - 1$, on a

$$\begin{aligned} U_1(4\cos^2\theta)\sin(\theta) &= (4\cos^2\theta - 1)\sin(\theta) = ((e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 1)\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1)\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{3i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} - e^{i\theta} - e^{-3i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} = \sin(3\theta) = \sin((2\times 1+1)\theta), \end{aligned}$$

donc on a bien $P_1$.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P_n$ et $P_{n+1}$ vérifiée.
Alors, comme $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$, on a

$$\begin{aligned} U_{n+2}(4\cos^2\theta)\sin(\theta) &= (4\cos^2\theta - 2)U_{n+1}(4\cos^2\theta)\sin(\theta) - U_n(4\cos^2\theta)\sin(\theta) \\ &= 2(2\cos^2\theta - 1)\sin((2(n+1)+1)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \quad (\text{d'après } P_n \text{ et } P_{n+1}) \\ &= 2\cos(2\theta)\sin((2n+3)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \quad (\text{car } \cos^2 a = \frac{\cos(2a)+1}{2}) \\ &= 2\frac{1}{2}(\sin((2n+5)\theta) + \sin((2n+1)\theta)) - \sin((2n+1)\theta) \quad (\text{car } \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))) \\ &= \sin((2n+5)\theta) = \sin((2(n+2)+1)\theta), \end{aligned}$$

donc on a bien $P_{n+2}$.
**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(4\cos^2\theta)\sin(\theta) = \sin((2n+1)\theta)$.

31. Comme, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

on a, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\cos((2m-2n)\theta) - \cos((2m+2n+2)\theta)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos((2m-2n)\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos((2m+2n+2)\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} \left[\dfrac{\sin((2m-2n)\theta)}{2m-2n}\right]_0^{\pi/2} - \left[\dfrac{\sin((2m+2n+2)\theta)}{2m+2n+2}\right]_0^{\pi/2} & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} - \left[\dfrac{\sin((2m+2n+2)\theta)}{2m+2n+2}\right]_0^{\pi/2} & \text{si } m = n \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 - 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} - 0 & \text{si } m = n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{si } m = n \end{cases}. \end{aligned}$$

32. • D'après la question 29, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n$ est unitaire de degré $n$.
• Pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a :

$$(U_m|U_n)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 U_m(4x)U_n(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

L'intégrale définissant $(U_m|U_n)$ converge, donc on peut effectuer le changement de variable $x=\cos^2\theta$ directement sur l'intégrale impropre et la nouvelle intégrale sera convergente et (voir question 27) :

$$\begin{aligned}(U_m|U_n)&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}U_m(4\cos^2\theta)\sin(\theta)U_n(4\cos^2\theta)\sin(\theta)d\theta\\ &=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)d\theta\quad\text{(d'après la question 30)}\\ &=\frac{4}{\pi}\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } m=n\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n\\ 1 & \text{si } m=n\end{cases}\end{aligned}$$

• $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien un système orthogonal tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|U_n\|=1$ (car $\|U_n\|^2=(U_n|U_n)=1$).

## III.C - Application

33. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mu_n=(X^n|1)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(4x)^n\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{2\times4^n}{\pi}\int_0^1x^{n-1/2}(1-x)^{1/2}dx.$$

Posons $u(x)=x^{n-1/2}$, $u'(x)=(n-1/2)x^{n-3/2}$, $v'(x)=(1-x)^{1/2}$, $v(x)=-\dfrac{(1-x)^{3/2}}{3/2}=-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.
$u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

$$\lim_{x\to0}u(x)v(x)=\lim_{x\to0}\underbrace{x^{n-1/2}}_{\to0\text{ car }n-1/2\geq1/2>0}\times\underbrace{\left(-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right)}_{\to-2/3}=0.$$

$$\lim_{x\to1}u(x)v(x)=\lim_{x\to0}\underbrace{x^{n-1/2}}_{\to1}\times\underbrace{\left(-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right)}_{\to0}=0.$$

De plus, $\displaystyle\int_0^1u(x)v'(x)dx$ converge (et vaut $\dfrac{\pi}{2\times4^n}\mu_n$), donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\begin{aligned}\mu_n=\frac{2\times4^n}{\pi}\int_0^1x^{n-1/2}(1-x)^{1/2}dx&=\frac{2\times4^n}{\pi}\underbrace{[u(x)v(x)]_0^1}_{=0}-\frac{2\times4^n}{\pi}\int_0^1-\frac{2}{3}(n-1/2)x^{n-3/2}(1-x)\sqrt{1-x}dx\quad(*)\\ &=\frac{2\times4^n}{\pi}\frac{2n-1}{3}\int_0^1x^{n-3/2}\sqrt{1-x}-x^{n-1/2}\sqrt{1-x}dx\\ &=\frac{2\times4^n}{3\pi}(2n-1)\left(\int_0^1x^{n-1-/2}\sqrt{1-x}dx-\int_0^1x^{n-1/2}\sqrt{1-x}dx\right)\\ &=\frac{2\times4^n}{3\pi}(2n-1)\left(\frac{\pi}{2\times4^{n-1}}\mu_{n-1}-\frac{\pi}{2\times4^n}\mu_n\right)\\ &=\frac{4}{3}(2n-1)\mu_{n-1}-\frac{1}{3}(2n-1)\mu_n\end{aligned}$$

donc, en multipliant par $\dfrac{3}{2n-1}$, on a $4\mu_{n-1}-\mu_n=\dfrac{3}{2n-1}\mu_n$.
Enfin, l'égalité $\dfrac{2\times4^n}{\pi}\displaystyle\int_0^1x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}dx=\dfrac{3}{2n-1}\mu_n$ vient de $(*)$, en multipliant aussi par $\dfrac{3}{2n-1}$.

34. • Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}4C_{n-1}-C_n&=\frac{4}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}-\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\ &=\frac{4}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\ &=\frac{4(2n-2)!}{n!(n-1)!}-\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\ &=\frac{4\times2n(2n-1)(2n-2)!}{2n(2n-1)n!(n-1)!}-\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\ &=\frac{2}{2n-1}\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\ &=\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\binom{2n}{n}=\frac{3}{(2n-1)(n+1)}\binom{2n}{n}=\frac{3}{2n-1}C_n.\end{aligned}$$

- $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence d'ordre 1, et ont le même premier terme car

$$\mu_0 = (1|1) = (U_0|U_0) = \|U_0\|^2 = 1 = C_0 \quad \text{(d'après la question 32)},$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.
*Si on n'est pas convaincu, on peut faire une récurrence immédiate.*

35. Numérotons ici aussi les lignes et les colonnes de $H_n$ de 0 à $n$ au lieu de 1 à $n+1$.
pour tout $(i,j) \in [[0,n]]^2$,

$$(H_n)_{i,j} = C_{i+j} = \mu_{i+j} = (X^{i+j}|1) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (4x)^{i+j}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (4x)^i(4x)^j\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx = (X^i|X^j) = (G_n)_{i,j},$$

où $G_n$ est la matrice introduite dans la partie II, donc, d'après la question 26,

$$\det(H_n) = \det(G_n) = \prod_{i=0}^{n}\|U_i\|^2 = \prod_{i=0}^{n} 1 = 1,$$

car on a vu que $(U_n)$ est un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire introduit ici.
*Rq : Notons au passage que l'on a montré que,* $\boxed{\textit{pour tout } (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ (X^i|X^j) = (X^{i+j}|1) = \mu_{i+j}.}$

## III.D - Un autre déterminant de Hankel

36. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$.
En développant $D_n(X)$ par rapport à la dernière ligne, on obtient une écriture de $D_n(X)$ sous la forme :

$$D_n(X) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+1+j+1}M_{n,j}X^j$$

où $M_{n,j} \in \mathbb{R}$ est le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la ligne $n$ (la dernière) et la colonne $j$ (en numérotant de 0 à $n$).
On a alors, par linéarité à gauche du déterminant,

$$(D_n|X^k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+2}M_{n,j}(X^j|X^k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+2}M_{n,j}(X^{j+k}|1) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+2}M_{n,j}C_{k+j},$$

où l'égalité $(X^k|X^j) = (X^{k+j}|1) = C_{k+j}$ a été prouvée dans les questions 34 et 35.
On reconnait alors le développement par rapport à la dernière ligne du déterminant :

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ C_k & C_{k+1} & \cdots & C_{k+n-2} & C_{k+n-1} & C_{k+n} \end{vmatrix},$$

matrice qui a les mêmes $n$ premières lignes que $D_n(X)$ (et donc les mêmes mineurs lorsque l'on développe par rapport à la dernière ligne).
Or, dans cette dernière matrice, $L_k = L_n$ (avec $k \neq n$ et en numérotant de 0 à $n$), donc

$$(D_n|X^k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+2}M_{n,j}C_{k+j} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ C_k & C_{k+1} & \cdots & C_{k+n-2} & C_{k+n-1} & C_{k+n} \end{vmatrix} = 0.$$

37. - En développant $D_n(X)$ par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$D_n(X) = (-1)^{2n+2}M_{n,n}X^n + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k+2}M_{n,k}X^k,$$

où $M_{n,n} = \det(H_{n-1}) = 1$ et $M_{n,k} \in \mathbb{R}$, donc $D_n$ est bien unitaire de degré $n$.
Par suite, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$, on a, en supposant $m < n$ (possible quitte à échanger les rôles de $m$ et $n$), et en écrivant $D_m = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$,

$$(D_m|D_n) = \left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k \Big| D_n\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k \underbrace{(X^k|D_n)}_{=0 \text{ car } k<n} = 0.$$

La famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
D'où, d'après la question 23, comme $(D_n)$ et $(U_n)$ sont deux systèmes orthogonaux pour le même produit scalaire, on a $D_n = U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• D'où, d'après la question 29,

$$(-1)^n = U_n(0) = D_n(0) = (-1)^{n+1} \det(H'_n) \quad \text{(développement par rapport à la dernière ligne)},$$

donc $\det(H'_n) = -1$.