ALGÈBRE

Questionnaire sur le cours

I. Révisions de PCSI et Compléments d'algèbre linéaire

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $E \neq \{0_E\}$.

Sur les matrices

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Traduire à l'aide des cœfficients :
   $$\mathrm{tr}(A^\top B) \quad , \quad \langle AX, Y\rangle \quad , \quad AB = BA \quad , \quad AX = \lambda X,$$
   où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire canonique.

2. Soit $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ tel que $AB = 0_n$.
   On aimerait montrer que A est la matrice nulle. Quelle hypothèse pourrait-on ajouter ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre les colonnes de A puis déterminer (avec le moins de calcul possible) une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Donner le plus d'assertions possibles équivalentes à l'assertion « la matrice A est inversible ».
   On pourra utiliser le déterminant, le rang, le noyau, les valeurs propres, l'endomorphisme canoniquement associé...

5. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $a_{1,1} \neq 0$.
   On note A' la matrice obtenue par les opérations sur les lignes : $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $L_i \leftarrow a_{1,1}L_i - a_{i,i}L_1$.
   Quelle est la forme de la matrice obtenue ?
   Exprimer le rang de A' en fonction de celui de A.
   Exprimer le déterminant de A' en fonction de celui de A.

6. Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire.
   On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   Que peut-on dire de la trace, du déterminant et du rang de chacune des matrices suivantes ? (s'il y a quelque chose à dire...) La cinquième et la sixième matrices sont écrites par colonne.
   $$\alpha A \;,\; A^\top \;,\; AB \;,\; A^{-1}(\text{en supposant } A \text{ inversible}) \;,\; (\alpha C_1 + \beta C_2 | C_2 | \dots | C_n) \;,\; (C_n | C_{n-1} | \dots | C_1) \;,\; T^p$$

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.
   Comment peut-on traduire l'assertion « la matrice A est de rang 1 » ?

Sur les sous-espaces vectoriels

1. Justifier en un argument que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

$$\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f'(x) + 2f(x) = 0\} \ \ , \ \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \text{ et } 2y + z = 0\}$$

$$\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\} \ \ , \ \ \{P(X+1) - P(X),\ P \in \mathbb{R}_3[X]\}$$

2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   Que signifient les notations ou assertions suivantes ?
   (a) $F + G$, $F \oplus G$
   (b) Les sous-espaces F et G sont en somme directe.
   (c) Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

3. On suppose que $E = F \oplus G$. Soit $u \in E$.
   (a) On suppose que $u \notin F$. Est-il correct d'affirmer alors que $u \in G$? Justifier.
   (b) Justifier qu'il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.
   Montrer l'équivalence :
$$u \notin F \iff u_2 \neq 0_E.$$

4. On suppose que $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, espace vectoriel de dimension finie.
   Donner différentes façons de prouver que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Sur les applications linéaires et les représentations matricielles

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
   Rappeler pourquoi un endomorphisme injectif de E est un automorphisme de E.

2. Donner la définition de deux matrices semblables.
   Comment peut-on montrer que deux matrices sont semblables ? ne sont pas semblables ?
   On pourra étudier des cas où les matrices sont ou non diagonalisables.

3. Donner la définition d'un sous-espace stable par un endomorphisme.
   Donner deux sous-espaces stables par tous les endomorphismes de E.

4. On suppose que f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}(E)$ qui commutent.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Ker}(f^3)$ et $\mathrm{Im}(f^2 - f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont stables par g.

5. (a) Comment s'écrit la matrice de φ dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ si F est stable par φ ? si F et G sont stables par φ ?
   (b) Comment peut-on construire une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale par blocs avec p blocs ?

Sur les polynômes interpolateurs de Lagrange

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ n éléments distincts de $\mathbb{K}$.
   Donner la définition des polynômes interpolateurs de Lagrange associés.
   Quel est leur degré ? leur cœfficient dominant ?
2. Déterminer un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant $P(0) = -1$, $P(2) = 1$ et $P(-1) = 2$.

II. Réduction

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $u \in E$.
   Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions entre guillemets.
   (a) « λ est une valeur propre de f »
   (b) « u est un vecteur propre de f »
   (c) On suppose que λ est une valeur propre de f et on note E_λ le sous-espace propre associé.
   « u appartient à E_λ »

2. Que pensez-vous des assertions suivantes trouvées dans des copies d'étudiants ?
   Contexte : On a $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.
   (a) « On a $AX = \lambda X$ donc λ est une valeur propre de A. »
   (b) « λ est une valeur propre de A donc pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = \lambda X$. »
   (c) « On a $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$.
   Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, la matrice A est diagonalisable. »

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Donner le plus d'assertions possibles équivalentes à l'assertion « λ est une valeur propre de A ».

4. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

5. Énoncer les critères de diagonalisabilité puis de trigonalisabilité.
   On n'oubliera ceux avec les polynômes annulateurs.

6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Expliquer, en le justifiant soigneusement, comment on peut déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

7. Soit λ une valeur propre. Comparer la dimension du sous-espace propre E_λ et la multiplicité de la valeur propre λ. Citer des cas dans lesquels il y a égalité.

8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels distincts.
   Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note m_k la multiplicité de la valeur propre λ_k.
   (a) Donner un polynôme annulateur non nul de A. Exprimer ce polynôme dans le cas où A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (b) On suppose de plus de A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner le polynôme annulateur de A non nul de plus petit degré possible.

9. Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1/2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -3/2 \\ 4 & 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

    La matrice A est-elle diagonalisable ? Si non, est-elle trigonalisable ?

11. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = I_n$ avec $M \neq I_n$ et $M \neq -I_n$.
Que peut-on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M ?
Déterminer le spectre de M et montrer que la matrice M est diagonalisable.

12. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente* c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_n$.
Montrer que 0 est l'unique valeur propre de M.

13. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Exprimer les éléments propres de $2M - I_n$ à l'aide de ceux de M.

III. Espaces euclidiens

1. (a) Donner la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
   (b) Rappeler la définition du produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (avec les matrices et avec les coordonnées).
   (c) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.
   (d) Montrer que $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas ?

2. Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien. Que signifie les assertions suivantes ?
   (a) « x et y sont orthogonaux » où $(x,y) \in E^2$
   (b) « F est l'orthogonal de G » où G est un sous-espace vectoriel de E
   (c) « la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale » où $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$
   (d) « la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale » où $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$
   (e) « p est la projection orthogonale sur F » où F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E
   (f) « M est orthogonale » où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

3. Compléter les assertions suivantes :
$$x \perp y \Longleftrightarrow x \in \dots$$
$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ x \perp u_i \Longleftrightarrow x \in \dots$$

4. Que vaut $\left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2$ lorsque la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale ? Et dans le cas général ?

5. Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u,v) \in E^2$.
Que vaut la $i$ème coordonnée de u dans la base $\mathscr{B}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$?
Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$. Que vaut $\langle u,v \rangle$?
On suppose que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Que vaut $\|u\|$?

6. Rappeler le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Que donne-t-il si on l'applique à une base de E ?

7. Soit E un espace euclidien. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Compléter les assertions suivantes.

$$f \text{ est une isométrie si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est } \dots$$

$$f \text{ est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est } \dots$$

8. (a) Une projection orthogonale est-elle une isométrie ? un endomorphisme autoadjoint ?
   (b) Une réflexion est-elle une isométrie ? un endomorphisme autoadjoint ?
   (c) Une rotation est-elle une isométrie ? un endomorphisme autoadjoint ?

9. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
   Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur M pour que f soit une projection orthogonale.

10. Soit A une matrice symétrique à cœfficients réels. Justifier que A est diagonalisable et expliquer, en le justifiant soigneusement, comment on peut déterminer une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{\mathsf{T}}$.

11. Rappeler la définition des matrices symétriques positives et définies positives et leur caractérisation par le spectre.