M_6 Forces centrales.

PCSI$_2$ 2024 – 2025

ATTENTION ! Ce qui suit n'est absolument pas au programme. C'est juste un petit complément pour ceux qui veulent savoir comment on trouve l'expression des trajectoires d'une particule dans un champ de force newtonien.

I Compléments

1. Formules de BINET

De façon à simplifier les calculs qui suivent, nous allons donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de M en fonction de C et de $u = \frac{1}{r}$.

En coordonnées polaires, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, or $C = r^2\dot{\theta} \iff \dot{\theta} = Cu^2$ et on peut écrire

$$r\dot{\theta} = rCu^2 = Cu \qquad \text{et} \qquad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\frac{1}{u}}{d\theta}Cu^2 = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}Cu^2 = -C\frac{du}{d\theta} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{v} = -C\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + Cu\vec{e}_\theta \Rightarrow v^2 = C^2\left[u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2\right] \qquad \text{: Formule de BINET pour la vitesse.}$$

De même, pour l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = Cu^2\frac{d}{d\theta}\left[-C\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + Cu\vec{e}_\theta\right] = Cu^2\left[-C\frac{d^2u}{d\theta^2}\vec{e}_r - C\frac{du}{d\theta}\vec{e}_\theta + C\frac{du}{d\theta}\vec{e}_\theta - Cu\vec{e}_r\right] \quad \text{d'où}$$

$$\vec{a} = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\vec{e}_r \qquad \text{: Formule de BINET pour l'accélération.}$$

On retrouve une accélération centrale puisque la force est centrale.

2. Équation de la trajectoire

Par application du PFD sur la particule dans $\mathcal{R}_g$ galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \iff m\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -ku^2\vec{e}_r$$

en posant $u = \frac{1}{r}$, or d'après la formule de BINET $\vec{a} = -C^2u^2[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u]\vec{e}_r$ et

$$-mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=-ku^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+1\times u=+\frac{k}{mC^2} \quad \text{si } u\neq 0 \iff r\neq\infty, \text{ d'où}$$

$$u=\frac{k}{mC^2}+A\cos(\theta+\varphi)=\frac{1+e\cos(\theta+\varphi)}{p} \qquad \text{en posant } p=\frac{mC^2}{k} \text{ et } e=pA.$$

et en choisissant ensuite l'axe d'origine des angles θ de telle sorte que $\varphi=0$, on obtient : $u=\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\theta}{p}$ puis finalement,

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad \text{: équation paramétrique d'une conique de paramètre } p \text{ et d'excentricité } e.$$

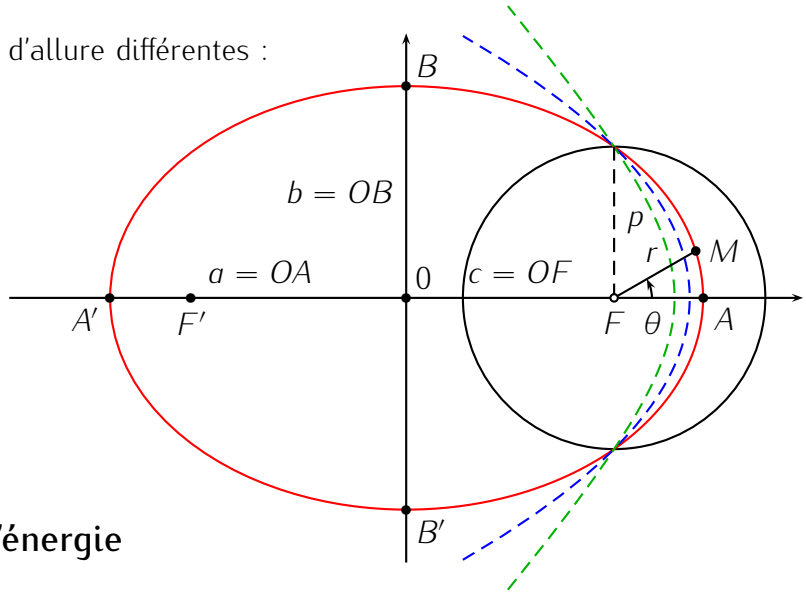
Remarques :

- on peut retrouver ce résultat par conservation de l'énergie mécanique ou d'autres méthodes.
- en prenant une autre origine pour θ, on obtient $r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$.

3. Forme de la trajectoire

Selon la valeur de e, on obtient des courbes d'allure différentes :

- si $e=0$, on a un cercle de rayon p,
- si $e<1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse de demi grand axe $OA=OA'=a$, de demi petit axe $OB=OB'=b$. Surface de l'ellipse $S=\pi ab$.
- si $e=1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une parabole, - - -
- si $e>1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole, - - -



4. Relation entre l'excentricité et l'énergie

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv^2-ku$$

en posant $u=\frac{1}{r}$, on a alors, d'après la formule de BINET,

$$v^2=C^2\left[u^2+(\frac{du}{d\theta})^2\right] \quad \text{avec} \quad u=\frac{1+e\cos\theta}{p}=\frac{1}{p}+\frac{e\cos\theta}{p}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=-\frac{e}{p}\sin\theta \quad \text{d'où}$$

$$v^2=C^2\left[\frac{1}{p^2}+\frac{2e}{p^2}\cos\theta+\frac{e^2}{p^2}\cos^2\theta+\frac{e^2}{p^2}\sin^2\theta\right]\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}\frac{mC^2}{p^2}(1+2e\cos\theta+e^2)-\frac{k}{p}-\frac{ke}{p}\cos\theta$$

$$\text{mais} \quad p=\frac{mC^2}{k}\Rightarrow mC^2=kp\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}\frac{k}{p}(1+2e\cos\theta+e^2-2-2e\cos\theta) \quad \text{et enfin,}$$

$$E_m=\frac{k}{2p}(e^2-1) \iff e=\sqrt{1+\frac{2pE_m}{k}}\geq 0$$

On retrouve :

- si $k < 0$: cas répulsif $p = \frac{mC^2}{k} < 0$ et $E_{p_{\text{eff}}} > 0$ d'où $E_m > E_{p_{\text{eff}}} > 0$ soit $e > 1$: hyperboles.
- si $k > 0$: cas attractif $p = \frac{mC^2}{k} > 0$ et
  - ⋆ si $E_m < 0$, $0 < e < 1$ ce qui correspond à une ellipse : état lié
  - ⋆ si $E_m = 0$, $e = 1$ ce qui correspond à une parabole : état de diffusion et
  - ⋆ si $E_m > 0$, $e > 1$ ce qui correspond à une hyperbole : état de diffusion.

Énergie : $E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1)$ et $a = \frac{p}{1-e^2}$ donc

$$E_m = -\frac{k}{2a} \qquad : E_m \text{ en fonction de } a, \underline{\text{relation utile à retenir.}}$$

5. Troisième loi de Kepler

De la deuxième loi de Kepler, on tire :

$$T = \frac{2\pi ab}{C} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} \quad \text{or } b^2 = pa$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 p}{C^2} \text{ et on avait } p = \frac{mC^2}{k}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 m}{k} \text{ avec } k = Gmm_S \text{ d'où } \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{Gmm_S} = \frac{4\pi^2}{Gm_S}$$

C'est une constante indépendante de la planète P considérée, on retrouve ainsi la

Troisième loi de Kepler : le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes du système solaire.

Table des matières

I Compléments
1. Formules de BINET
2. Équation de la trajectoire
3. Forme de la trajectoire
4. Relation entre l'excentricité et l'énergie
5. Troisième loi de Kepler