

Analyse Chapitre 10 : Analyse Asymptotique

Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(x+2)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}$ (en fonction de $a \in \mathbb{R}$)

6. $\frac{3x^3 + e^x + 2}{e^{2x} + \ln(x) + x^5}$ en $+\infty$.

7. $x^2(\ln(x+1) - \ln x)$ en $+\infty$

8. $\frac{x \ln(1+x)}{\sin x}$ en 0.

9. $(1+x^\alpha)^{\frac{1}{x}}$ en 0 selon la valeur de $\alpha > 0$.

Exercice 2 :

Ranger par ordre de négligeabilité les suites ci dessous :

$$(\ln n), (\sqrt{n}), (e^n), (n^9), (2^n), (\sqrt[5]{n}), \left(\frac{4}{5}\right)^n, (n!), \left(\frac{1}{n^3}\right), (\ln^3(n)), (5), (n^3)$$

Exercice 3 :

Calculez les limites des suites suivantes, en proposant un équivalent simple, ou, à défaut, en utilisant toute autre technique permettant de conclure :

1. $u_n = \frac{4n^4 + 3n^2 + 1}{n^2 + n^3 - 2n^4}$.

2. $u_n = \frac{2^n}{n^5 + 3n + 1}$.

3. $u_n = \frac{2^n + n}{2^n}$.

4. $u_n = (n^4 + 1)(n^3 + 2)e^{-n}$.

5. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2 - 3n + 3}$.

6. $u_n = (n-3)\sqrt{\frac{n^3+1}{n^2+3}}$.

7. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

8. $u_n = e^n \ln(1 + e^{-n^2})$.

9. $u_n = (n^2 - 5n + 3) \sin \frac{1}{n^2 + n + 1}$

10. $u_n = n \ln(1 + e^{-n})$

11. $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

12. $u_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$.

13. $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 + n + 1}$

14. $u_n = n^2 \left(\exp\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) - 1 \right)$

15. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n+1}$

16. $u_n = (2n^2 - n + 1) \left(\sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1 \right)$

Exercice 4 :

Calculez les développements limités indiqués :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\cos x}{1-x}$

2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \frac{\sin x}{x}$

3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+\sin(x)}$

4. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{\cos(x)})$

5. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

6. $D_3(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$.

7. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x)^2 \cos(x)^2$

Exercice 5 :

Calculez les limites au point indiqué de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.

2. $f(x) = \frac{\sin(2x) - x}{\ln(1+x)}$ en 0.

3. $f(x) = \frac{(\sin x)\sqrt{1+x^2} - x}{x^3}$ en 0

4. $f(x) = \frac{ch(x) - \sqrt{1+x^2}}{x^3}$ en 0^-

5. $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - e^x}$ en 0

6. $\frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))}$ en 0

Exercice 6 :

Déterminez des équivalents simples au voisinage du point indiqué des fonctions f suivante :

1. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+\sin(x)})$ en $x = 0$

2. $f : x \mapsto \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$ au voisinage de 0.

3. $f : x \mapsto \ln(1 + \frac{1}{x+1}) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7 :

1. Soit $f : x \mapsto \ln(x) + e^{x-1}$. Déterminez l'équation de la tangente en 1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ et la position relative de cette tangente au voisinage de 1.

2. Soit $f : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x - 2}}{x - 1}$. A l'aide d'un DL au voisinage de 1, montrez que f peut se prolonger par continuité et discutez de la courbe de f au voisinage de 1.

3. Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{3x-2}}{1+\ln x}$. Montrez que f admet un maximum local en 1.

Exercice 8 :

Etudiez à l'aide de développements limités les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ de la courbe représentative de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

3. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$

Exercice 9 :

Soit f et φ deux fonctions strictement positives au voisinage de a et telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \varphi(x)$.

1. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(\varphi(x))$.

2. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = +\infty$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(\varphi(x))$.

3. A-t-on $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(\varphi(x))$ dans tous les cas (sans hypothèse supplémentaire) ?

4. Que dire de $e^{f(x)}$ et $e^{\varphi(x)}$?