Algèbre - Chapitre 11 : Espaces vectoriels - dimension finie
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1. Quel est le rang de la famille (u, v, w) ? Donnez une base de $F = Vect(u, v, w)$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
   a) Montrez que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donnez en une base.
   b) Montrez que $F = G$.
3. Compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :

On considère les sous espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

1. Trouver une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3, e_4) de $\mathbb{G}$.
2. Calculer $F \cap G$.
3. En déduire que (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre et constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = z\}$.

1. Déterminez une base de E.
2. Trouver un supplémentaire de E.

Exercice 4 :

Soient les ensembles E et F définis par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$$

Soit $w = (-1, 1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$.

1. Montrez que E et F sont des sous espaces vectoriels dont on déterminera des bases et les dimensions.
2. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
3. En notant (u, v) la base de F obtenue en 1, montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Exercice 5 :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit les ensembles

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = M\}$$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^T = -M\}$$

L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est appelé ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrez que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels.
2. Montrez qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$