Probabilités - Chapitre 1 : Probabilités sur un ensemble fini

Exercice 1 :

On tire 3 boules avec remise d'une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3. Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note A_i l'évenement : “la i-ème boule tirée porte le numero 1”. Exprimez les événements suivants sous la forme d'unions, d'intersections et de complémentaire des événements A_i.

B : On obtient 3 fois la boule 1

C : On obtient au moins une fois la boule 1

D : On obtient une seule fois la boule 1

E : La boule 1 est obtenue pour la première fois au 2ième tirage

F : La boule 1 est obtenue pour la première fois au troisième tirage

G : La boule 1 est obtenue pour la première fois au 1er tirage ou n'est pas obtenue.

Exercice 2 :

Les trois mousquetaires (donc 4 personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Proposez un espace probabilisé qui modelise cette expérience aléatoire, et calculer les probabilités des événements suivants :

- A : les deux bottes soient les siennes.
- B : les deux bottes forment une paire.
- C : les deux bottes sont deux pieds droits.
- D : les deux bottes appartiennent à deux mousquetaires différents.

Exercice 3 : Problème du chevalier de Meré

“Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, on a 1 chance sur 6 d'obtenir un 6. Donc si on lance le dé deux fois de suite, on double nos chances d'obtenir au moins un 6.”

Cela semble tout à fait logique. Mais est-ce vrai ?

Exercice 4 :

Aux échec, la tour est une pièce qui “voit” les pièces situées dans la même ligne ou dans la même colonne qu'elle. Elle ne voit pas en diagonale.

On pose deux tours au hasard sur un échiquier (c'est à dire un damier de 8x8 cases). Proposez un espace probabilisé qui modelise cette expérience aléatoire et calculer la probabilité que les deux tours ne se voient pas.

Exercice 5 :

On considère un groupe de n personnes dont on regarde la date d'anniversaire. On suppose que personne n'est né un 29 février et que les autres dates sont équiprobables.

1. Proposez un espace probabilisé qui modelise cette expérience aléatoire et calculez la probabilité qu'au moins 2 personnes fêtent leur anniversaire le même jour.
2. Ecrire un programme en python intitulé "anniv(n)" qui calcule cette probabilité.
3. Ecrire un programme qui retourne le nombre n a partir duquel cette probabilité dépasse une probabilité p donnée en argument

Exercice 6 :

Un élève de PCSI2 va skier dans la station de Metabief. Arrivé en haut du teleski "Troupezy", il a le choix entre trois pistes : la Renversée (une noire), la Printemps (une rouge) ou descendre prudemment par la Renard (une verte). Pas très en forme suite au premier semestre de prépa, il risque de tomber 2 fois sur 3 (en moyenne) si il prend la Renversée, il a une chance sur 3 de tomber sur la Printemps, et il chute avec une probabilité 1/5 si il prend la Renard.

En raison du brouillard important au sommet, il ne peut savoir quelle piste il a pris et choisi donc au hasard une des 3.

1. Quelle est la probabilité qu'il tombe ?
2. Un autre élève, peu courageux, est resté en bas des pistes et voit arriver son ami couvert de neige car il est tombé. Quelle est la probabilité que le skieur soit descendu par la Renard ?

Exercice 7 :

On choisit au hasard une des 4 urnes ci-dessous et on en tire une boule au hasard.

- L'urne 1 contient 3 boules rouges, 2 blanches et 3 noires.
- L'urne 2 contient 4 boules rouges, 3 blanches et 1 noire.
- L'urne 3 contient 2 boules rouges, 1 blanche et 1 noire.
- L'urne 4 contient 1 boule rouge, 6 blanches et 1 noires.

La boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne 3 ?

Exercice 8 :

Un laboratoire vient de mettre au point un test pour détecter une maladie qui touche en moyenne un individu sur 5000. Pour un patient malade, le test est positif dans 99.8% des cas. Si le patient est sain, le test est négatif avec une probabilité de $\dfrac{2999}{3000}$.

Ce laboratoire affirme que son test est donc très efficace...
L'objectif de l'exercice est de modérer cette affirmation !

1. Le test est négatif. Quelle est la probabilité que l'individu soit sain ? Cela confirme-t-il l'affirmation du labo ?
2. Montrez que ce test n'est pas fiable pour dépister les individus malades...

Exercice 9 :

Un fumeur cherche à arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : si un jour il est parvenu à ne pas fumer, il fume le lendemain avec la probabilité 1/2. Si il a fumé un jour, il refumera le lendemain avec la probabilité 1/4. On note p_n la proba qu'il fume le n-ème jour.

Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de p_1 et n et déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 10 : Problème de Monty Hall

Au cours d'un jeu télévisé, un candidat doit choisir entre trois boîtes. Dans une des boîtes se trouvent les clés d'une magnifique voiture, alors que les autres boîtes sont vides.

Les trois boîtes sont identiques aux yeux du candidat qui ne dispose au départ d'aucun indice pour orienter son choix.

Il désigne une des boîtes. Le présentateur du jeu, qui sait où sont les clés, ouvre alors une des deux autres et lui montre que celle-ci est vide. Il laisse alors au candidat la possibilité de revenir sur son premier choix.

Quelle stratégie doit-il adopter pour optimiser ses chances de gagner ?

Exercice 11 :

Le 14 juillet, à Besançon, le risque de pluie est d'environ 70% (source : valeur totalement inventée pour les besoins de l'exercice...)

Comme tous les ans, la ville prévoit de fêter le 14 juillet avec un spectacle en extérieur et dispose de deux sources d'informations indépendantes :

- Meteo France, qui est fiable à 97%.
- Une grenouille de la Citadelle qui se trompe une fois sur 20.

La météo annonce qu'il va faire beau alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir de la pluie. On suppose qu'en cette période de l'année à Besançon, les temps possibles ne sont que "beau temps" ou "pluie".

Quel est le temps le plus probable ?

Exercice 12 :

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donne face avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une des deux pièces au hasard, et on la lance. Si on obtient face, on conserve la pièce, et si on obtient pile, on change et on prend l'autre pièce. On procède alors à un nouveau lancer, et on répète l'opération.

1. On note A_n l'événenement "on joue avec la pièce A au n ième lancer" et note $p_n = P(A_n)$. Montrez que (p_n) est une suite arithmético-géométrique de paramètres à déterminer, et calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancé.

Exercice 13 :

En préparant leur colle de math de cette semaine, A et B, deux élèves de PCSI2, ont fait l'impasse sur deux des trois démonstrations : ils ne connaissent qu'une seule démo, la même pour les deux. Monsieur D demande toujours une démonstration, et pose trois sujets face contre table en laissant les élèves choisir le leur au hasard. Vrai gentleman, A laisse passer B en premier et ils tirent les sujets (sans remise). On suppose que le troisième élève du groupe tire le sujet en dernier (ça lui est égal : il a tout préparé comme il faut).

1. Les événements "A réussit la question de cours" et "B réussit la question de cours" sont-ils indépendants ? Trouver les probabilités de "A réussit" et de "B réussit".
2. Même question, toujours si chacun connaît une et une seule démo, mais cette fois différente l'une de l'autre.

Exercice 14 :

On lance un dé plusieurs fois en décidant de s'arrêter au premier 6 obtenu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "le n-eme lancer a lieu et amène un 6", et B_n "le n-ème lancer a lieu et amène 1,2,3,4 ou 5"

1. Montrez que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants et que $\overline{A_2} \neq B_2$.
2. On suppose que $n \geq 2$. Justifier que $A_n = B_1 \cap B_2 \cap .... \cap B_{n-1} \cap A_n$
3. En déduire $P(A_n)$ en fonction de n et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$.