

Espaces vectoriels : dimension finie

I Existence de bases en dimension finie

On revient dans cette section sur le résultat admis à la fin du chapitre précédent concernant la notion de dimension d'un espace vectoriel

1) Dimension finie



Définition : dimension finie

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{K}^n$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est la k ième composante.
On a montré facilement que $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathbb{K}^n$ et que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.
C'est donc une base de $\mathbb{K}^n$, que l'on appelle **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
 $\mathbb{K}^n$ est donc de dimension finie.
2. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, on a vu que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base, appelée encore **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$, et $\mathbb{K}_n[X]$ est donc de dimension finie.
3. Pour $\mathbb{K}[X]$, on ne peut pas donner de famille finie qui engendre l'ensemble des polynômes. Cet espace est de dimension infinie.
4. Si E est un espace vectoriel, l'espace nul, $F = \{O_E\}$ est engendré par le vecteur nul : c'est donc un espace de dimension finie.

2) "Extraction" et existence des bases :



Proposition 1 : Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice finie d'un espace E non nul, on peut extraire une base de E .
Autrement dit : si $\mathcal{F}$ est génératrice de E , alors il existe une sous famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{B}$ est une base de E .

▷ *Preuve* : E est dimension fini, donc il existe une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ qui est génératrice de E .

On applique l'algorithme suivant :

1. Si la famille est libre, c'est terminé : on a une base de E .
2. Si la famille est liée, au moins l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres. On en détermine un et on le retire de la famille.
3. On retourne à l'étape 1 avec la famille "réduite" et on répète l'opération...

Le nombre de vecteurs étant fini, l'algorithme s'arrêtera toujours, au pire avec une famille ne contenant qu'un seul vecteur. Ce vecteur sera non nul puisque E est non nul, et il constituerait donc une famille libre.... $\triangleleft$

Comme un espace vectoriel de dimension finie est engendré par une famille finie de vecteurs, on a le corolaire suivant :

**Corolaire 1 : existence de bases**

| Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non nul. Alors E admet une base.

Exemple :

Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, -1, 2)$ et $u_3 = (1, 3, -2)$.

3) Complétion de base

**Proposition 2 : théorème de la base incomplète**

| Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

| S'il existe une famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E qui soit libre alors $\mathcal{F}$ est une base ou peut être complétée avec des vecteurs de E pour devenir une base de E .

▷ *Preuve* :



Méthode :

COMPLÉTER UNE BASE

Le théorème de la base incomplète est théorique, mais la démonstration donne un algorithme de recherche : il suffit de prendre des vecteurs d'une base existante (et on en aura presque toujours une....), en prenant soin de vérifier que la famille est libre à chaque ajout !

Exemple :

$(1, 2, 0)$ et $(1, 0, 0)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (car non colinéaire), mais n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ (car la troisième composante est toujours nulle).

On veut compléter cette base :

II Utilisation de la dimension

1) Dimension d'un espace vectoriel

a) Résultat fondamental

Lemme 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un espace vectoriel engendré par une famille de n vecteurs. Alors toute famille constituée de $n + 1$ vecteurs est liée.

▷ *Preuve* : L'idée est que si on écrit nos $n + 1$ vecteurs comme combinaisons linéaires des n vecteurs de E , il va nécessairement se créer un lien, car on aura "trop de vecteurs".

La preuve est technique et se fait par récurrence : voir l'annexe pour le détail.

◁



Theorème 1 : unicité du cardinal des bases

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases ont même cardinal.

▷ *Preuve* :

◁



Définition : dimension d'un espace vectoriel

On appelle **dimension d'un espace vectoriel** de dimension fini E le cardinal commun à toutes ses bases.

On note $\dim(E)$ cette quantité.

convention : Comme l'espace nul n'est engendré que par le vecteur nul, qui est lui même lié, cet espace n'a pas de base : on dira donc que l'espace nul a pour dimension 0.

b) Exemples :

- **Dimension des espaces vectoriels classiques :** Etant donné les résultats énoncés dans ce chapitre et les exemples déjà vus, on peut dire que

$$\dim(\mathbb{K}^n) = \quad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = \quad \text{et } \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$$

- **L'espace nul** $\{O_E\}$ est de dimension

- **Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène :**

- **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :**

2) Cardinalité et base

Le théorème 1 et les principes d'extraction ou de complétion de bases ont des conséquences pratique très fortes sur la recherche des bases : le théorème ci dessous va donner des raccourcis vraiment efficaces :



Theorème 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

1. Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E , alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E avec $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est une base (donc génératrice et libre).
3. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
4. Si $\mathcal{F}$ est libre avec $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est une base (donc libre et génératrice).

▷ *Preuve* :

Exemples d'applications

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, -1, 1)$.

On veut montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Toujours dans $\mathbb{R}^3$, soit $e_4 = (4, 8, -2)$ et $\mathcal{G} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$\mathcal{G}$ est-elle libre ou liée ?

- Soit $E = \{(x, 3x + y, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On montre facilement que $\text{Vect}((1, 3, 0), (0, 1, 1)) = E$ et donc que E est de dimension 2.

Montrons que $(1, 4, 1)$ et $(2, 0, -6)$ forment aussi une base de E .

- Avec ce résultat, on peut aussi montrer la proposition suivante, très pratique :

Proposition 3 :

Dans $\mathbb{K}_n[X]$, soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de n polynômes à degrés échelonnés (c'est à dire $\deg(P_0) = 0, \deg(P_1) = 1, \dots, \deg(P_n) = n$).

Alors $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :

$(2, 4X - 1, 4X^2 + 3, X^3 - 2X + 1)$ est une famille de 4 polynômes à degrés échelonnés. C'est donc une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

III Dimension, sous espaces et somme

1) Dimension d'un sous espace vectoriel :



Proposition 4 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E .
Alors :

- (i) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- (ii) $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

▷ *Preuve* :

2) Rang d'une famille de vecteurs

a) Définition



Définition : rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

On appelle **rang** de $\mathcal{F}$, noté $\text{rg}(\mathcal{F})$ ou $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Autrement dit :

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

Exemple :

Soient $u_1 = (1, 3, 0)$, $u_2 = (-2, 10, -1)$ et $u_3 = (5, -1, 1)$. Déterminons le rang de (u_1, u_2, u_3) :

Remarques :

- On pourra montrer que le rang de la famille de vecteurs est aussi le rang du système obtenu quand on cherche à déterminer si la famille est libre ou liée...
- Attention au vocabulaire ! On a maintenant trois définitions qui tournent autour du même concept : cardinal, dimension, et rang. Il faut prendre garde à ne pas confondre les trois et à être précis sur leur utilisation...

b) Rang, dimension, liberté...



Theorème 3 :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un e.v E de dimension n . Alors

1. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$.
2. $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est
3. $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est
4. $\text{rg}(\mathcal{F}) = n = p$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est

▷ Preuve :

3) Somme de deux sous espaces vectoriels

a) Base d'une somme

On rappelle le résultat vu dans le chapitre précédent, réécrit en dimension finie avec des bases :



Theorème 4 :

Soient F et G deux sous espace vectoriels d'un espace E de dimension finie.
Soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectivement de F et de G .
Alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est génératrice de $F + G$.



Danger !

PIÈGE CLASSIQUE

Attention, cette famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ n'est pas forcément libre ! A priori, elle n'est que génératrice, pas nécessairement une base !

Cependant, si les espaces sont en somme directe, on a alors le résultat ci dessous :



Proposition 5 : base adaptée à la somme de sous espaces vectoriels

Soient F et G deux sous espaces vectoriel supplémentaires dans un espace vectoriel E , c'est à dire $E = F \oplus G$.

Si $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ une base de G , alors

$(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_m)$ est une base de E .

Une telle base est dite **adaptée** à la décomposition de $E = F \oplus G$.

▷ *Preuve* :

b) Dimension d'une somme :



Theorème 5 : Formule de Grassmann

Soient F et G deux s.e.v d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

en particulier

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

▷ *Preuve* :

Cette formule ressemble un peu à la preuve de la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, et la preuve va utiliser le même genre d'idée, en travaillant sur des bases bien choisies de $F, F \cap G, \text{ et } G$.

Notons $n = \dim(F)$ et $p = \dim(G)$.

- Premier cas : si $F \cap G = \{O_E\}$. Alors la somme est directe et $\dim(F \cap G) = 0$.
En notant $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ une base de G , on sait, d'après la proposition 5 que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p)$ est une base de $F + G$.
Cette base contenant $n + p$ éléments, donc on a bien

$$\dim(F + G) = n + p - 0 = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

- Deuxième cas : si $F \cap G \neq \{O_E\}$.
Soit $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ une base de $F \cap G$.
Alors on peut la compléter en une base de F , que l'on note $(f_1, f_2, \dots, f_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$
Et on peut la compléter en une base de G , que l'on note $(u_1, \dots, u_r, g_1, \dots, g_{p-r})$
On montre alors (détail en annexe) que $(f_1, \dots, f_{n-r}, u_1, \dots, u_r, g_1, \dots, g_{p-r})$ est une base de $F + G$.
En comptant le nombre de vecteurs, on obtient

$$\dim(F + G) = n - r + r + p - r = n + p - r = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

◁

c) Caractérisation des s.e.v. supplémentaires :



Theorème 6 : caractérisation des s.e.v. supplémentaires

Soient F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de dimension finie.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = F \oplus G$
- (ii) $F \cap G = \{\vec{O}\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- (iii) $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- (iv) La juxtaposition d'une base de F et d'une base de G donne une base de E

Précision : on appelle juxtaposition (ou concaténation) le fait de mettre "bout à bout" les familles.

Par exemple, la juxtaposition de $(u_1, u_2), (u_2, u_3)$ est (u_1, u_2, u_2, u_3) : contrairement à l'union, on ne supprime pas les doublons...

▷ *Preuve* :

◁

Enfin, le théorème de la base incomplète, combiné au théorème ci dessus, permet de montrer le résultat suivant :



Theorème 7 : existence de supplémentaires

Soit F un sous espace vectoriel d'un e.v E de dimension finie avec $F \neq E$.
Alors il existe un s.e.v G tels que $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$ et $E = F \oplus G$.

IV Annexe : détail des preuves

Preuve du lemme 1 p3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un espace vectoriel engendré par une famille de n vecteurs. Alors toute famille constituée de $n + 1$ vecteurs est liée.

▷ *Preuve* : Par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 0$, $E = \{O_E\}$ et la seule famille constituée de 1 vecteur de E est O_E tout seul, qui est lié (puisque $1.O_E = O_E$).

Hérédité : supposons la propriété vraie pour tout sev engendré par n vecteurs et soit E un espace vectoriel engendré par $n + 1$ vecteurs.

Ainsi, $E = \text{vect}(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Posons $F = \text{vect}(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ et $G = \text{vect}(e_n)$.

On a donc $E = F + G$.

Soit maintenant $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ une famille de $n + 2$ vecteurs de E .

Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, il existe $f_k \in F$ et $\alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que

$$u_k = f_k + \underset{(\in G)}{\alpha_k e_n}$$

Si tous les α_k sont nuls, alors la famille est constituée de $n + 2$ vecteurs de F , et cet espace est engendré par n vecteurs. Ainsi, $u_0, \dots, u_n$ est liée, donc $u_0, \dots, u_{n+1}$ est liée aussi.

Supposons que l'un des α_k soit non nul, par exemple α_0 (quitte à renuméroter la famille).

Pour tout $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, posons maintenant

$$v_k = u_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} u_0$$

L'idée est de faire en sorte de faire disparaître le e_n qui est présent dans les u_k .

Et on a en effet

$$\begin{aligned} v_k &= f_k + \alpha_k e_n - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} f_0 - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \alpha_0 e_n \\ &= f_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} f_0 \end{aligned}$$

Ainsi, les $n + 1$ vecteurs v_k sont des vecteurs de F , qui est un espace engendré par n vecteurs. La famille est donc liée et il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k = 0_E$$

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \left(u_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} u_0 \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \frac{\alpha_k}{\alpha_0} u_0 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k + \left(- \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \right) u_0$$

Et finalement, en posant $\lambda_0 = - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \frac{\alpha_k}{\alpha_0}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k u_k = O_E$$

avec les λ_k non tous nul. La famille est donc liée !

◁

Détail preuve de la formule de Grassmann (p10) :

On a $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ une base de $F \cap G$,

$(f_1, f_2, \dots, f_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ une base de F

et $(u_1, \dots, u_r, g_1, \dots, g_{p-r})$ une base de G

On veut montrer que la famille $(f_1, \dots, f_{n-r}, u_1, \dots, u_r, g_1, \dots, g_{p-r})$ est une base de $F + G$.

On sait déjà que c'est une famille génératrice (puisque c'est l'union de bases respectives de F et de G). Il faut montrer que c'est une famille libre.

Supposons que

$$(\mathcal{E}) \quad \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^r \mu_i u_i + \sum_{i=1}^{p-r} \nu_i g_i = O_E$$

Montrons que tous les coefficients (λ_i) , (μ_i) et (ν_i) sont nuls.

Remarquons déjà que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^r \mu_i u_i}_{\in F} = - \underbrace{\sum_{i=1}^{p-r} \nu_i g_i}_{\in G}$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^r \mu_i u_i \in F \cap G$. Comme $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ est une base de $F \cap G$, on en déduit qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^r \mu_i u_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$$

Or, la famille $(f_1, \dots, f_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est libre (puisque c'est une base de F) : l'écriture dans cette famille est donc unique.

Par conséquent pour tout $i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ (et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\mu_i = \alpha_i$)

Revenons à $(\mathcal{E})$ avec nos λ_i nuls. Il ne reste que :

$$(\mathcal{E}) \quad \sum_{i=1}^r \mu_i u_i + \sum_{i=1}^{p-r} \nu_i g_i = O_E$$

Mais la famille $(u_1, u_2, \dots, u_r, g_1, \dots, g_{p-r})$ est libre puisque c'est une base de G .

Par conséquent, pour tout i , les coefficients μ_i et ν_i sont nuls.

Conclusion : tous les scalaires de notre combinaison linéaire sont nuls, et la famille est libre !