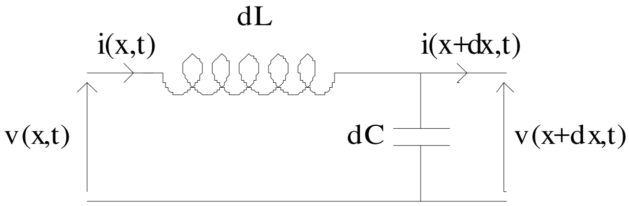
TP 13

ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS UNE LIGNE COAXIALE

Question 1: A l'aide de la loi des mailles et de la loi des noeuds, établir deux équations aux dérivées partielles couplées reliant l'intensité i(x,t) et la tension v(x,t).



Loi des mailles : $v(x,t) = dL\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + v(x+dx,t) \quad \Rightarrow \quad 0 = \Lambda dx\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + v(x+dx,t) - v(x,t)$

$\Rightarrow \boxed{\Lambda\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0}$ en divisant par dx (1)

Loi des nœuds : $i(x,t) = dC\dfrac{\partial v}{\partial t}(x+dx,t) + i(x+dx,t) \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma dx\dfrac{\partial v}{\partial t}(x+dx,t) + i(x+dx,t) - i(x,t)$

or : $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x+dx,t) \approx \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)dx$

$\Gamma dx\dfrac{\partial v}{\partial t}(x+dx,t) \approx \Gamma dx\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \Gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)dx^2$ Le terme en dx² est négligeable

$\Rightarrow \boxed{\Gamma\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t) = 0}$ en divisant par dx (2)

Question 2 : En déduire que ces grandeurs sont solutions de l'équation de D'Alembert à une dimension.

On dérive (1) par rapport à x : $\Lambda\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t)\right) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0$

On injecte (2) : $\Lambda\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\Gamma\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0$ D'où : $\boxed{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$ avec $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$

Idem pour l'intensité i(x,t)

Question 3 : Dans le cas d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant selon x dans le sens positif, montrer que $v(x,t) = Z_c\, i(x,t)$ où $Z_c = c\Lambda = 1/c\Gamma$ est appelée impédance caractéristique de la ligne.
Pourquoi ce résultat est-il valable pour une onde plane progressive quelconque ?

En notation complexe pour des ondes PPH : $\underline{v}(x,t) = \underline{V}e^{j(\omega t - kx)}$ et $\underline{i}(x,t) = \underline{I}e^{j(\omega t - kx)}$

(1) devient : $\Lambda j\omega\underline{i}(x,t) - jk\underline{v}(x,t) = 0$ avec $k = \omega/c$ donc : $\Lambda\underline{i}(x,t) - \dfrac{1}{c}\underline{v}(x,t) = 0$

d'où : $\boxed{Z_c = \dfrac{\underline{v}(x,t)}{\underline{i}(x,t)} = \Lambda c = \dfrac{1}{c\Gamma}}$

Ce résultat est valable pour une OPP quelconque car elle peut s'écrire comme somme d'OPPH.

Question 4 : Démontrer que $v(x,t) = -Z_c\, i(x,t)$ pour une onde plane progressive se propageant selon x dans le sens négatif .

Calcul identique au précédent en remplaçant -jk par + jk d'où le changement de signe.

Question 5 : Démontrer que le coefficient de réflexion est : $r = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$

Condition aux limites en x = 0 : $v(0,t) = Ri(0,t) \Rightarrow v_i(0,t) + v_r(0,t) = R(i_i(0,t) + i_r(0,t))$

$$\Rightarrow f(t) + rf(t) = R\left(\frac{f(t)}{Z_c} - \frac{rf(t)}{Z_c}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + r = \frac{R}{Z_c}(1 - r)$$

D'où l'expression de r donnée.

Question 6 : Que vaut r lorsque R = 0 (sortie en court-circuit) et R = +∞ (sortie ouverte) ?

R = 0 => r = -1 réflexion totale avec changement de signe
R = +∞ => r = 1 réflexion totale sans changement de signe

Question 7 : Déduire des observations la célérité c des ondes à l'intérieur de la ligne.
Estimer l'incertitude sur c.

Impulsion de sortie en retard de Δt = 400 ns sur l'impulsion d'entrée => c = L/Δt = $2{,}5.10^8$ $m.s^{-1}$

Incertitude-type sur Δt : u(Δt) = 10 ns => $u(c) = c\frac{u(\Delta t)}{\Delta t} = 6.10^6$ $m.s^{-1}$ => $\boxed{c = (2{,}50 \pm 0{,}06).\ 10^8\ m.s^{-1}}$

Question 8 : Relever les amplitudes de l'impulsion, que l'on notera a′ et a″ respectivement en tête de ligne et en bout de ligne. Estimer l'ordre de grandeur du rapport a″/a′, puis, en prenant 20 fois le log, en déduire l'ordre de grandeur des pertes en ligne en dB/km.
Comparer avec une fibre optique pour laquelle l'atténuation peut descendre à 0,2 dB/km.

a′ = 4,32 V et a″ = 3,84 V => 20log(a″/a′) = - 1 dB/100 m = -10 dB/km

Question 9 : Avec les deux grandes impédances placées aux deux bouts de la ligne, on y impose en quelque sorte des noeuds de courant, donc des ventres de tension. En déduire la relation entre L et λ permettant d'avoir une amplitude maximale de tension aux deux extrémités.

Entre deux ventres : $L = n\frac{\lambda}{2}$ avec n entier => $\nu_n = n\frac{c}{2L}$

On mesure les fréquences de résonance : ν_1 = 1,14 MHz ; ν_2 = 2,33 MHz ; ν_3 = 3,53 MHz ; ν_4 = 4,70 MHz

Entre deux résonances : $\Delta\nu = \frac{c}{2L} \approx 1{,}2$ MHz => c = $2{,}4.10^8$ $m.s^{-1}$

Question 10 : A l'aide du a-, prévoir les fréquences pour lesquelles la ligne ouverte se comporte, en entrée, comme un court-circuit.

Avec $Z_L = +\infty$: $\underline{Z}(0) = Z_c\frac{\cos(kL)}{j\sin(kL)}$

Court-circuit en entrée : $\underline{Z}(0) = 0 \Rightarrow \cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = (n + \frac{1}{2})\pi \Rightarrow \nu_n = (n + \frac{1}{2})\frac{c}{2L}$

On mesure les fréquences : ν_1 = 1,76 MHz ; ν_2 = 3,05 MHz ; ν_3 = 4,21 MHz
Elles s'intercalent bien entre les valeurs mesurées à la question9.