Chapitre 18

Calcul différentiel 2

Dans ce chapitre :

- E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension $n \in \mathbb{N}^*$;
- Ω désigne un ouvert non vide de E ;
- X et A désignent des parties de E (pas nécessairement ouvertes) ;
- Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I Vecteurs tangents à une partie

I. A Vecteurs tangents

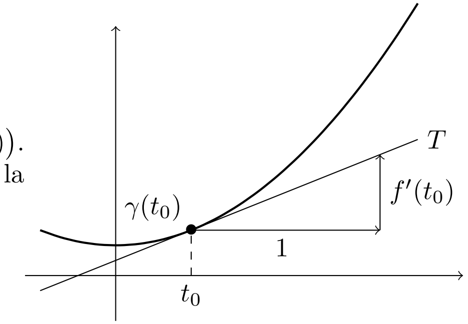
Définition 1.1

Soit X une partie de E et $x \in X$. Un vecteur v de E est appelé **vecteur tangent à X en x** lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Notation : L'ensemble des vecteurs tangents à X en x est noté : T_xX.

Exemple 1.2 : Graphe d'une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.
On considère l'arc $\gamma : t \mapsto \big(t, f(t)\big)$.
L'image de γ est donc le graphe de la fonction f et $\gamma'(t_0) = \big(1, f'(t_0)\big)$

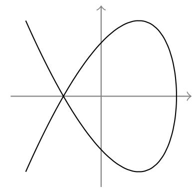


Remarques 1.3 :
- Le vecteur nul est tangent à X en tout point x de X ($\gamma : t \mapsto \underline{\hspace{2cm}}$).
- Si $x \in \mathring{X}$, alors $T_xX = \underline{\hspace{2cm}}$.
- L'ensemble T_xX est un cône de E c'est à dire une partie de E stable par multiplication par un scalaire : si $v \in T_xX$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda v \in T_xX$.

Attention : L'ensemble des vecteurs tangents n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E.

Contre exemple 1.4 :

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos(2t), \sin(3t)) \end{array}$$



et $\mathcal{C}$ l'image de γ.

En particulier pour $t_0 = \frac{\pi}{3}$ et $a = \gamma(t_0) = \big(-\frac{1}{2}, 0\big)$, alors $\gamma'(t_0) = -(\sqrt{3}, 3)$.
Donc $\gamma'(t_0)\mathbb{R} \subset T_a\mathcal{C}$, mais $\gamma'(t_0)\mathbb{R} \neq T_a\mathcal{C}$.

I. B Exemples d'espaces tangents

Exemple 1.5 : Soit X un sous-espace affine de E, on note F la direction de X.
Pour tout $x \in H$, $T_xX = F$.

Exemple 1.6 : Soit E un espace euclidien, S la sphère de centre 0_E et de rayon $r > 0$ et $a \in S$.
Alors T_aS est l'hyperplan orthogonal au vecteur a.

Exemple 1.7 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et
$G = \big\{\big(x, y, f(x,y)\big);\ \text{avec } (x,y) \in \Omega\big\}$ le graphe de f.
Si f est différentiable en $a = (x_0, y_0) \in \Omega$, alors l'ensemble de vecteurs tangents à G en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\Big(\big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a)\big), \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a)\big)\Big)$.

I. C Ensembles définis par une équation

Théorème 1.8

Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, $k \in \mathbb{R}$ et $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = k\}$.
Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_xX = \mathrm{Ker}(\,\mathrm{d}g(x))$.

Corollaire 1.9

Supposons que E est un espace euclidien, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = k\}$.
Si $a \in X$ et $\nabla g(a) \neq 0$, alors $T_aX = \big(\nabla g(a)\big)^{\perp}$.

Exemple 1.10 : Retour aux l'exemples 2.5 de la sphère euclidienne et 1.7.

II Extrema et points critiques

Rappel : Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$, alors :

- f admet un maximum sur A en a lorsque : $\forall x \in A, f(x) \leqslant f(a)$;
- f admet un minimum sur A en a lorsque : $\forall x \in A, f(x) \geqslant f(a)$;
- f admet un extremum sur A en a lorsqu'elle y admet un maximum ou un minimum.

Définition 2.1

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$, alors :

- f admet un **maximum local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap A, f(x) \leqslant f(a)$;
- f admet un **minimum local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap A, f(x) \geqslant f(a)$;
- f admet un **extremum local** en a lorsqu'elle y admet un maximum local ou un minimum local.

Définition 2.2

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, un point $a \in A$ est appelé **point critique** de f lorsque a est un point intérieur de A et f est différentiable en a avec $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Théorème 2.3

Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point a intérieur de A et si f est différentiable en a, a est un point critique de f.

Méthode 2.4 (recherche d'extrema sur un ouvert)

On suppose f différentiable de Ω dans $\mathbb{R}$.

- On cherche les points critiques.
- Pour chaque point critique, on étudie le signe de $g : h \mapsto f(a+h) - f(a)$.

Exemples 2.5 : Dans chaque cas, déterminer si la fonction f admet un extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.
2. $f : (x, y) \mapsto 2x^2y + (y-1)^2$

Méthode 2.6 (recherche d'extrema sur un compact A)

Soit A un compact, f continue sur A et différentiable sur l'intérieur de A.

1. On justifie l'existence d'un maximum et d'un minimum par le théorème des bornes.
2. Les extrema sont à chercher :
   - parmi les points critiques ;
   - sur la frontière de A.

Exemples 2.7 : 1. $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$ et

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy(1-x-y) \end{array}$$

2.

$$g \quad : \quad \begin{array}{ccc} [0\,;1] \times [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \end{array}$$

III Étude au second ordre

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

III. A Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Définition 3.1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de Ω dans $\mathbb{R}$.
On appelle **matrice hessienne** de f en a la matrice :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Remarque 3.2 : D'après le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est symétrique.

Théorème 3.3 (Taylor-Young à l'ordre 2)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de Ω dans $\mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. Alors, au voisinage de a :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) \times h, h \rangle + \underset{h \to 0}{o}\left(\|h\|^2\right).$$

Remarque 3.4 : On peut écrire ce développement limité à l'ordre 2 sous la forme :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\top \times h + \frac{1}{2} h^\top \times H_f(a)^\top \times h + \underset{h \to 0}{o}\left(\|h\|^2\right).$$

III. B Condiction nécessaire d'ordre 2

Théorème 3.5

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de Ω dans $\mathbb{R}$ et si f admet un minimum local en a, alors :

- a est un point critique de f ;
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Remarque 3.6 : De même si f admet un maximum local en a, alors a est un point critique de f et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, c'est à dire $H_f(a)$ est symétrique (réelle) et ses valeurs propres sont toutes négatives.

Exemple 3.7 : Soit $f : (x, y) \mapsto x(x+1)^2 - y^2$, déterminer ses points critiques, f y admet-elle des extrema locaux ?

III. C Condition suffisante d'extremum

Théorème 3.8

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a.

Remarque 3.9 : De même, si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est symétrique définie négative, alors f atteint un maximum local strict en a.

Corollaire 3.10

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur <u>un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$</u> dans $\mathbb{R}$ et a est un point critique de f :

- si $\det H_f(a) > 0$ et $\operatorname{tr} H_f(a) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a ;
- si $\det H_f(a) > 0$ et $\operatorname{tr} H_f(a) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a ;
- si $\det H_f(a) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en a.

Remarque 3.11 : Dans le cas où $\det H_f(a) = 0$, on ne peut pas conclure directement.

Exemple 3.12 : Retour aux exemples 2.5 et 3.7.

IV Optimisation sous contrainte

Théorème 4.1

Soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une partie de Ω. Si :

- la restiction de f à X admet un extremum local en a ;
- f est différentiable en a ;

alors : $\mathrm{d}f(a)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en a.

Remarque 4.2 : Les conditions des parties précédentes sur les extrema ne s'appliquent que sur des ouverts. Ce théorème permet d'avoir une condition nécessaire pour trouver un extremum, par exemple sur la frontière d'un compact.

Théorème 4.3 (Optimisation sous contrainte)

Soit f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Si :

- $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$;
- $a \in X$ et $\mathrm{d}g(a) \neq 0$;
- la restriction de f à X admet un extremum en a ;

alors : $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$.

Corollaire 4.4

On supose que E est un espace euclidien.
Soit f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Si :

- $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$;
- $a \in X$ et $\nabla g(a) \neq 0$;
- la restriction de f à X admet un extremum en a ;

alors : $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.

Exemple 4.5 : Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy - 3y^2$ et S le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

1. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur S.
2. Déterminer des points candidats où ces extrema peuvent être atteints.

Exemple 4.6 : Soit $n \geqslant 2, s > 0$ et $A = \left\{ x \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s \right\}$.

Déterminer les extrema de la restiction de f à A avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \prod_{i=1}^n x_i. \end{array}$$