CALCUL DIFFÉRENTIEL

Preuve du Théorème 11

On se limite au cas $p = 2$.

On suppose que $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ avec pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in U$.

On pose pour tout $t \in I$, $g(t) = f(x(t), y(t))$.

Soit $t_0 \in I$.

On a $(x(t_0), y(t_0)) \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ donc f admet un développement limité à l'ordre 1 au point $(x(t_0), y(t_0))$. Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{(x,y) \rightarrow (x(t_0), y(t_0))} \varepsilon(x, y) = 0$ telle que pour tout $(x, y) \in U$:

$$f(x, y) = f(x(t_0), y(t_0)) + \partial_1 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (x - x(t_0)) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (y - y(t_0)) + \|(x - x(t_0), y - y(t_0))\| \varepsilon(x, y).$$

Pour tout $t \in I$, comme $(x(t), y(t)) \in U$, on a alors :

$$f(x(t), y(t)) = f(x(t_0), y(t_0)) + \partial_1 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (x(t) - x(t_0)) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (y(t) - y(t_0)) + \|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\| \varepsilon(x(t), y(t)).$$

Comme $t_0 \in I$ et $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, x admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0 .

Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = 0$ telle que pour tout $t \in I$:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t).$$

Comme $t_0 \in I$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, y admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0 .

Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_2(t) = 0$ telle que pour tout $t \in I$:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t).$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus, on obtient alors pour tout $t \in I$:

$$f(x(t), y(t)) = f(x(t_0), y(t_0)) + \partial_1 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (x'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t)) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (y'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t)) + \|(x'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t), y'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t))\| \varepsilon(x(t), y(t))$$

ou encore :

$$g(t) = g(t_0) + (\partial_1 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0))(t - t_0) + (t - t_0)(\partial_1 f(x(t_0), y(t_0))\varepsilon_1(t) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0))\varepsilon_2(t)) + |t - t_0| \|(x'(t_0) + \varepsilon_1(t), y'(t_0) + \varepsilon_2(t))\| \varepsilon(x(t), y(t)).$$

En posant pour tout $t \in I$:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \underbrace{\partial_1 f(x(t_0), y(t_0))\varepsilon_1(t)}_{\xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0} + \underbrace{\partial_2 f(x(t_0), y(t_0))\varepsilon_2(t)}_{\xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0} + \underbrace{s(t)}_{\text{borné}} \underbrace{\|(x'(t_0) + \varepsilon_1(t), y'(t_0) + \varepsilon_2(t))\|}_{\xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \|(x'(t_0), y'(t_0))\|} \underbrace{\varepsilon(x(t), y(t))}_{\xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0}$$

où $s(t) = 1$ si $t - t_0 \geq 0$ et $s(t) = -1$ si $t - t_0 \leq 0$, on vérifie aisément que $\lim_{t \rightarrow t_0} \tilde{\varepsilon}(t) = 0$ et :

$$g(t) = g(t_0) + (\partial_1 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0))(t - t_0) + (t - t_0)\tilde{\varepsilon}(t).$$

On a ainsi écrit le développement limité à l'ordre 1 de g en t_0 .

On en déduit que g est dérivable en t_0 et $g'(t_0) = \partial_1 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0)$.

Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in I$, on en déduit que g est dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \partial_1 f(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t)) \cdot y'(t).$$

Par continuité de x , y , x' , y' , $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$, on obtient par les théorèmes généraux que g' est continue sur I . D'où $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.