Espace vectoriels - probabilités - analyse
DS7

Durée : 3h **Calculatrice interdite**

Exercice 1 : Des "gentils" exercices sur les espaces vectoriels de dimension finie

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$.
   a) Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de E.
   b) Déterminez un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 0)$.
   On pose $F = vect(u_1, u_2)$ et $G = vect(v_1, v_2)$.
   a) Justifiez, presque sans calcul, que F et G ne sont pas supplémentaires.
   b) Montrez que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$
   c) Montrez que $G = F$.

1. a) On utilise la rédaction habituelle, ou une version "express" :

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\} \\ &= \{(y - 2z, y, z); y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1); y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect((1, 1, 0), (-2, 0, 1)) \end{aligned}$$

   Donc E est un sous espace vectoriel, et comme $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est une famille de deux vecteurs non colinéaire, elle est libre et constitue une base de E.

   b) Prenons $u = (1, 0, 0)$ Comme $1 - 0 + 2.0 \neq 0$, $u \notin E$ donc $u \notin vect((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$.
   Ainsi $((1, 1, 0), (-2, 0, 1), u)$ est une famille libre, de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   En posant $D = Vect(u)$, on obtient que la juxtaposition d'une base de E et d'une base de D est une base de $\mathbb{R}^3$, autrement dit, D est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

2. a) Comme les vecteurs engendrant F et G sont non colinéaire, $dim(F) = dim(G) = 2$.
   Ainsi, $dim(F) + dim(G) = 4 > 3 = dim(\mathbb{R}^3)$. Les espaces ne peuvent donc pas être supplémentaires.

   b) On remarque que les composantes de u_1 et de u_2 vérifient l'équation de $x + 2y - z = 0$. Donc u_1 et u_2 sont dans $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$, et donc

$$F \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$$

   Or $dim(F) = 2$ et l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$ n'est pas $\mathbb{R}^3$, donc n'est pas de dimension 3. Il est donc dimension 2 et on a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$

   c) On fait exactement le même raisonnement que la question b en utilisant l'équation obtenue, ce qui montre que $G = F$.

Exercice 2 :

Soit m un nombre réel, et soient les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 1, m), \quad v_2 = (2, m + 1, 2), \quad v_3 = (m, 1, 1).$$

On pose $V = Vect(v_1, v_2, v_3)$.

1. Déterminez en fonction des valeurs de m le rang de la famille (v_1, v_2, v_3).
2. Quels sont les cas où (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Pour $m = 1$, déterminez une base et la dimension de V. Décrire géométriquement l'ensemble V.
4. Mêmes questions que 3) avec $m = -3$.
5. Donnez pour $m = 0$ les coordonnées du vecteur $(4, 2, 1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

1. Etudions la liberté de la famille (v_1, v_2, v_3).
   On cherche trois réels λ, μ, ν tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = (0, 0, 0)$
   On obtient le système :
   $$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu + m\nu & = 0 \\ \lambda + (m+1)\mu + \nu & = 0 \\ m\lambda + 2\mu + \nu & = 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu + m\nu & = 0 \\ (m-1)\mu + (1-m)\nu & = 0 \\ (2-2m)\mu + (1-m^2)\nu & = 0 \end{array}\right.$$
   $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu + m\nu & = 0 \\ (m-1)\mu + (1-m)\nu & = 0 \\ (3-2m-m^2)\nu & = 0 \end{array}\right.$$
   Ce système est de rang 3 et n'admet qu'une seule solution si et seulement si $m - 1 \neq 0$ et $3 - 2m - m^2 \neq 0$, donc si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -3$.
   Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, la famille est libre, et de rang 3.
   Pour $m = 1$, il ne reste plus qu'une ligne : la famille est de rang 1.
   Pour $m = -3$, la famille est de rang 2.
2. pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, la famille est libre, de cardinal 3 et la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
3. pour $m = 1$, on obtient $v_1 = v_3$ et $v_2 = 2v_1$, ainsi $V = Vect(v_1)$: c'est un espace de dimension 1 et (v_1) est une base. C'est une droite vectorielle, dirigée par v_1.
4. Pour $m = -3$, le système obtenu dans la question 1 devient :
   $$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + 2\mu - 3\nu & = 0 \\ -4\mu + 4\nu & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = \nu \\ \mu & = \nu \\ \nu & \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$
   Ainsi la famille est liée et $v_3 \in vect(v_1, v_2)$ (prendre par exemple $\nu = -1$)
   Ainsi, $V = Vect((1, 1, -3), (2, -2, 2))$. Les deux vecteurs restants sont non colinéaires, donc la famille $((1, 1, -3), (2, -2, 2))$ est libre et constitue une base de V qui est de dimension 2. C'est un plan.
5. Pour $m = 0$, on a $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 2)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$. D'après la question 1, on sait qu'on a bien affaire à une base.
   Pour trouver les coordonnées de $(4, 2, 1)$ dans cette base, on cherche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x(1, 1, 0) + y(2, 1, 2) + z(0, 1, 1) = (4, 2, 1)$. On résout le système et on trouve que $(4, 2, 1) = 2v_1 + v_2 - v_3$ et donc que $\boxed{\text{les coordonnées de } (4, 2, 1) \text{ dans cette base sont } (2, 1, -1).}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

1. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et précisez $f'(0)$.
3. Attention : question plus difficile. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et précisez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   En 0 : on a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0 = f(0)$.
   On en déduit que f est bien continue en 0.
2. Pour $x < 0$, f est dérivable avec $f'(x) = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$.
   Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^2}{e^X} = 0$ par croissance comparée.
   Comme f est continue en 0, on peut appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour en déduire que f est dérivable en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $f'(0) = 0$.

3. Question très difficile si on n'a pas cherché certains exos de TD... On observe qu'en dérivant une deuxième fois f, f' va donner une expression en puissance de $\frac{1}{x}$, multipliée par $e^{-\frac{1}{x}}$, et que ce phénomène va se répéter.

   Commençons donc pas montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ où P_n est un polynôme.

   L'initialisation est vérifiée avec $P_0(\frac{1}{x}) = 1$.

   Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété vérifiée pour n, alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = f^{(n)'}(x) &= -\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^2}(P_n(\frac{1}{x}) - P_n'(\frac{1}{x}))e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

   En posant $P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X))$, par dérivation, somme et produit de polynômes, $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$, et on a bien $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

   La propriété est héréditaire, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On peut maintenant montrez que la fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

   On a déjà $\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$ et pour $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{P(X)}{e^X} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

   Le théorème de prolongement de la dérivée donne donc, pour tout n, que $f^{(n-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $f^{(n-1)'}(0) = 0$, c'est à dire f de classe $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n)}(0) = 0$

   Ouf !

Exercice 4 :

Les 3 lions d'Afrique d'un parc zoologique n'aiment pas vraiment la compagnie des visiteurs.

Chaque jour, **un et un seul** lion se porte volontaire pour faire le spectacle et sortir. Mufasa se montre un jour sur 4, de même pour Taka. Quant à la lionne Sarabi, elle se montre un jour sur 2.

Lorsque Mufasa sort, il y a une probabilité de 2/3 qu'on l'entende rugir. Taka est plus discret et on ne l'entend rugir qu'une fois sur 2. Enfin Sarabi rugit une fois sur 3.

On suppose qu'un lion (ou une lionne) ne rugit que si il sort, et que ce sont les seuls animaux à rugir dans le parc.

En visitant le parc zoologique, vous entendez un rugissement. Pouvez vous déterminez le félin que vous avez le plus probablement entendu ?

Soit (Ω, P) un espace probabilisé qui modélise l'expérience.

On commence par définir les événements qui nous intéressent :

Soit M (resp T, resp. S) l'événement "Mufasa sort". (resp "Taka", resp. "Sarabi")

Soir R l'événement "un lion rugit".

On cherche à comparer $P_R(M)$, $P_R(T)$ et $P_R(S)$.

Comme M, T et S forment un système complet d'événements, on peut appliquer la formule de Bayes directement (ou bien faire les probas composée/proba totales), et on a :

$$\begin{aligned} P_R(M) &= \frac{P(M)P_M(R)}{P(M)P_M(R) + P(T)P_T(R) + P(S)P_S(R)} = \frac{1/4 \times 2/3}{1/4 \times 2/3 + 1/4 \times 1/2 + 1/2 \times 1/3} \\ &= \frac{4}{11} \end{aligned}$$

De même

$$P_R(T) = \frac{3}{11} \text{ et } P_R(S) = \frac{4}{11}$$

Ainsi, deux lions sont les plus probables : Sarabi et Mufasa. On ne peut pas déterminer le félin le plus probablement entendu !

Remarque : vous aurez (ou pas !) reconnu des noms issus du Roi Lion. Ceux qui ont vu le dernier film savent pourquoi Taka est en retrait....

Exercice 5 :

Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle ABC. A chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets.

Les probabilités pour que la place de départ soit A, B ou C sont respectivement notée a_0, b_0, c_0. La puce est obligatoirement sur un des sommets au départ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (respectivement B_n et C_n), les événements : "après le n-ième saut, la puce est au point A" (respectivement B et C).

On note a_n, b_n et c_n leurs probabilités respectives. Ainsi $a_n = P(A_n)$, etc...

Pour M et N appartenant à $\{A, B, C\}$, on note p_{MN} la probabilité que le saut s'effectue de M vers N. On suppose que cette probabilité ne dépend pas du numero du saut.

Ainsi, par exemple, p_{AB} désigne la probabilité que, si la puce est en A, elle saute vers le sommet B. On a donc $p_{AB} = P_{A_n}(B_{n+1})$ pour tout n...

Première partie :

1. Justifiez que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$. Exprimez de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire la matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
3. Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$. Pour M et N appartenant à $\{A, B, C\}$ avec $M \neq N$, on pose $p_{MN} = a$ et $p_{MM} = 1 - 2a$.
   a) Ecrire la matrice M correspondant à ces valeurs.
   b) En justifiant que $b_n + c_n = 1 - a_n$, montrez que (a_n) et une suite arithmético-géométrique, et exprimez a_n en fonction de n et de a_0.
   c) Montrez que $|1 - 3a| < 1$.
   d) En déduire la limite de chacune des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on suppose $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.

1. Comment interpréter la condition $p_{AA} = 1$? Ecrire la matrice M associée à ces valeurs.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez P^{-1}.
3. Soit $D = P^{-1}MP$. Calculez D et précisez D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. En déduire M^n.
5. Justifiez que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. En déduire $\lim a_n$.
   Quelle interprétation pouvez-vous en faire ?

Première partie :

1. La puce est sur un des sommets au départ, donc A_0, B_0 et C_0 forment un système complet d'événements, et $A_0 \cup B_0 \cup C_0 = \Omega$ et $P(A_0 \cup B_0 \cup C_0) = 1$.
   Comme les événements sont incompatibles, on obtient : $P(A_0) + P(B_0) + P(C_0) = 1$, soit, avec les notations de l'énoncé, $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.
   ATTENTION : a_0, b_0 et c_0 ne sont pas un système complet d'événements ! c'est A_0, B_0 et C_0 qui sont des événements, les lettres minuscules sont des nombres...
   De la même manière, A, B et C n'est pas un système complet d'événements : ce sont des points !
   Enfin, il n'y a aucun raison que $a_0 = b_0 = c_0 = \frac{1}{3}$: "aléatoire" ne veut pas dire "uniforme"...
2. il suffit d'utiliser le système complet d'événement $\{A_n, B_n, C_n\}$ et la formule des probabilités totales :
$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}).$$
   Enfin, on traduit les proba conditionnelles en fonction des p_{MN} et il vient :
   $\boxed{a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n}$
   On raisonne de la même façon pour b_{n+1} et c_{n+1} et on a
   $\boxed{b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n \text{ et } c_{n+1} = p_{AC}a_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n}$
   On pose enfin
$$M = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{BA} & p_{CA} \\ p_{AB} & p_{BB} & p_{CB} \\ p_{AC} & p_{BC} & p_{CC} \end{pmatrix}$$
3. a) On a $M = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$
   b) Comme A_n, B_n et C_n forment un s.c.e, on a $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$, autrement dit $a_n + b_n + c_n = 1$, d'où $b_n + c_n = 1 - a_n$.
   On écrit ensuite pour $n \in \mathbb{N}$,
   $a_{n+1} = (1-2a)a_n + ab_n + ac_n = (1-2a)a_n + a(1-a_n) = a + (1-3a)a_n$.

On cherche maintenant c tel que $a_n - c$ est géométrique de raison $(1-3a)$. On trouve $c = \dfrac{1}{3}$ et on arrive à

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3} + (a_0 - \frac{1}{3})(1-3a)^n}$$

c) Comme $0 < a < \dfrac{1}{2}$, on a $-\dfrac{1}{2} < 1 - 3a < 1$ et donc $|1-3a| < 1$.

d) Comme $|1-3a| < 1$, alors $(1-3a)^n \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$.
Pour avoir b_n et c_n, on peut recommencer le raisonnement en entier, ou bien voir que le problème est symétrique (A, B et C joue le même rôle), donc que la formule est identique, c'est à dire :

$$\boxed{b_n = \frac{1}{3} + (b_0 - \frac{1}{3})(1-3a)^n \text{ et } c_n = \frac{1}{3} + (c_0 - \frac{1}{3})(1-3a)^n}$$

D'où encore $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{3}$.
Interprétation : à long terme, les trois positions sont équiprobables. La position initiale de la puce est "oubliée".

Deuxième partie :

1. $p_{AA} = 1$ signifie que si la puce est en A, elle y reste. On a alors $p_{AC} = p_{AB} = 0$. Il en est de même pour p_{BC} : la puce ne va jamais en C à partir de B....
2. On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.
3. On calcule et on trouve $P^{-1} = P$.
4. On trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$.
5. C'est une démo par récurrence faite déjà plein de fois, cf les corrigés précédent.
(Ne pas oublier de montrer que $M = PDP^{-1}$ dans la récurrence !)
On arrive à :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^n & 1-2(1/2)^n+(1/3)^n \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$$
6. Comme d'habitude, par une récurrence rapide qu'il faut rédiger :
init : comme $M^0 = I_3$ on a $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
Comme $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, l'hypothèse de récurrence donne
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M^n M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$
Ce qui prouve l'hérédité.
En identifiant la première ligne, on en déduit :
$$\boxed{a_n = a_0 + (1-(1/2)^n)b_0 + (1-2(1/2)^n+(1/3)^n)c_0}$$
Remarquons enfin que $(1/2)^n$ et $(1/3)^n$ tendent vers 0 (forme q^n avec $|q| < 1$), donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1.}$
Interprétation : à long terme, on est sûr que la puce finira par aller en A et n'en bougera plus...

Exercice 6 : bonus

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(0) = P(1) = 0\}$ et soit $G = \mathbb{K}_1[X]$

1. Justifiez que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et donnez en une base.
2. Montrez que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Et si on quittait la dimension finie ?
   On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Soit $\tilde{F} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = f(1)\}$.
   Montrez $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{F} \oplus G$

1. Si $n < 2$, F est l'espace nul et l'énoncé n'a pas vraiment de sens ! pardon pour la coquille !
   Supposons $n \geq 2$:
   Procédons par équivalences pour tout récolter d'un coup :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_n[X] \text{et} P(0) = 0 = P(1) \\ &\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_n[X] \text{et } X(X-1)|P \\ &\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ et } \exists Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X], t.q. P = X(X-1)Q \\ &\Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{K}, t.q. P = X(X-1)\sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \\ &\Leftrightarrow P \in Vect((X(X-1)X^k), k \in [\![0; n-2]\!] \end{aligned}$$

   Ainsi F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$, engendré par les polynômes $X(X-1)X^k$, pour $k \in [\![0; n-2]\!]$. Ces polynômes étant tous de degré distinct, ils constituent une famille libre, et c'est donc une base de F. Ainsi $dim(F) = n - 2 + 1 = n - 1$

2. Une base de G est $(1, X)$ et donc $dim(G) = 2$. De plus, si $P \in F \cap G$, on obtient immédiatement $P = 0$ (un polynôme de degré inférieur ou égale à 1 ne peut avoir deux racines, sauf s'il est le polynôme nul). Donc $F \cap G = \{O_{\mathbb{K}_n[X]}$ et $dim(F) + dim(G) = n - 1 + 2 = n + 1 = dim(\mathbb{K}_n[X])$
   Donc $\mathbb{K}_n[X] = F \oplus G$.

3. Encore une mini coquille : il faut ici supposer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On peut vérifier facilement que $\tilde{F}$ est un sous espace vectoriel, mais on ne peut donner de base de $\tilde{F}$.
   On montre de la même façon qu'en $b)$ que $\tilde{F} \cap G = \{O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}}\}$, donc que la somme est directe.

   Il faut maintenant montrer qu'on a $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R} = \tilde{F} + G$, mais l'argument de dimension ne fonctionne pas.

   Il faut donc passer par une analyse synthèse pour trouver, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}$, $\tilde{f} \in \tilde{F}$ et $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $f = \tilde{f} + P$

   En posant $\tilde{f}(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x - f(0)$ et $P(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$, on a bien $P(x) \in \mathbb{K}_1[X]$, $\tilde{f}(0) = f(0) - f(0) = 0$, $\tilde{f}(1) = f(1) - f(1) + f(0) - f(0) = 0$, donc $\tilde{f} \in F$.

   Autrement dit $f \in \tilde{F} + G$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset F + G$.

   La seconde inclusion est immédiate et on obtient bien $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{F} \oplus G$