ANALYSE

Questionnaire sur le cours

I. Sur les séries numériques

1. En distinguant très clairement *hypothèses* et *conclusions*, citer :
   (a) le critère de comparaison par inégalité,
   (b) le critère de comparaison par équivalent,
   (c) le critère de d'Alembert,
   (d) le critère de Leibniz,
   (e) le résultat sur le produit de Cauchy (avec définition du produit de Cauchy).

2. Que peut-on ajouter comme hypothèses pour pouvoir écrire :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$? Et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N}u_{n,k}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,k}$?
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$?
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n+1}$?
   (d) $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$?
   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$?
   (f) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}u_n=0$?

3. Justifier l'existence et donner la valeur des sommes suivantes.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}\quad,\quad\sum_{n=10}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad,\quad\sum_{n=1}^{8}2^n\quad,\quad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

4. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^\alpha\ln n}$ dans les cas $\alpha<1$, $\alpha>1$ et $\alpha=1$.

5. Mme Nou a besoin de votre aide pour corriger ses copies.
   Voici des énoncés d'exercices avec les réponses des étudiants.
   Repérez les erreurs faites dans les raisonnements ci-dessous et modifiez-les pour les rendre corrects.
   Pour (c), on pourra aussi proposer une réponse plus rapide en utilisant les séries entières.

   (a) *Déterminer la nature de la série* $\displaystyle\sum\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$.

   Réponse de l'étudiant :
   On a pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant2$, $\ln(e^n-1)\leqslant\ln(e^n)=n$ donc $\displaystyle\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\geqslant\frac{\ln n}{n}\geqslant\frac{\ln 2}{n}$.
   On a donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\geqslant\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln 2}{n}$.

Comme la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln 2}{n}$ diverge (série harmonique), on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ diverge.

(b) *Déterminer la nature de la série* $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Réponse de l'étudiant :
Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, on a $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 donc par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
Par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

(c) *Déterminer, selon la valeur du réel x, la nature de la série numérique* $\sum nx^n$.

Réponse de l'étudiant :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nx^n$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n+1}{n}x \underset{n\to+\infty}{\sim} x.$$

Par le critère de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum nx^n$ converge si et seulement si $x < 1$.

II. Sur les suites et séries de fonctions

Ici, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1. (a) Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Rappeler la définition de $\|f\|_\infty^I$.

   (b) On souhaite prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f.
   On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant u_n$ où (u_n) est une suite numérique convergente. Terminer le raisonnement.

   (c) On souhaite prouver que la série $\sum f_n$ converge normalement sur I.
   On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant u_n$ où (u_n) est une suite numérique telle que la série $\sum u_n$ converge. Terminer le raisonnement.

2. Rappeler les définitions des différents modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$ et préciser les liens existants entre eux.
   Préciser pour chaque mode ce que l'on sait de la convergence des suites de fonctions (f_n) et (R_n) (suite des restes).

3. On souhaite prouver que $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.
   Citer deux théorèmes (en précisant soigneusement leurs hypothèses) permettant de justifier cette interversion limite/intégrale.

4. Dans cette question, N désigne un entier fixé.
   (a) Quelles hypothèses peut-on vérifier pour garantir la continuité sur I de la fonction $\sum_{n=0}^{N} f_n$?

   la continuité sur I de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$?

   (b) Quelles hypothèses peut-on vérifier pour garantir la classe $\mathscr{C}^2$ sur I de la fonction $\sum_{n=0}^{N} f_n$?

   la classe $\mathscr{C}^2$ sur I de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$?

   (c) Quelles hypothèses peut-on vérifier pour justifier l'égalité $\int_I \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$?

   l'égalité $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$? (On proposera trois approches en précisant soigneusement les hypothèses des théorèmes utilisés.)

5. Citer le théorème de la double-limite.

6. Dans la question 4.(a).(b), pour la continuité/classe $\mathscr{C}^2$ de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I, si l'hypothèse de convergence uniforme semble difficile à obtenir sur I, que peut-on penser à faire ?
Dans la question 5 pour le théorème de la double-limite, si on veut la limite en une borne de I mais que l'hypothèse de convergence uniforme semble difficile à obtenir sur I, que peut-on penser à faire ?

7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur I et $\sum f_n$ converge simplement sur I.
Étudier les variations de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I.

8. On souhaite établir une égalité du type $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Que peut-on penser à faire ?

III. Sur les séries entières

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.

2. Citer le théorème de d'Alembert pour les séries entières.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$.
   Que peut-on dire de la série numérique $\sum a_n z^n$? de la suite numérique $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$.
   Que peut-on dire de la série numérique $\sum a_n z^n$? de la suite numérique $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = R$.
   Que peut-on dire de la série numérique $\sum a_n z^n$? de la suite numérique $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   Pour illustrer votre propos, vous pourrez utiliser les séries entières $\sum \frac{1}{n} z^n$, $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ et $\sum n z^n$.

4. En tant que série de fonctions, que peut-on dire sur le mode de convergence d'une série entière ?
Y a-t-il convergence normale sur l'intervalle ouvert de convergence ? On pourra utiliser $\sum x^n$.

5. Que savez-vous sur la dérivation et l'intégration de la somme d'une série entière ?

6. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Montrer que $R\left(\sum_{n\geqslant 0} P(X=n)x^n\right) \geqslant 1$.

   On pose $G_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n$.
   Montrer que G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et qu'elle est continue sur $[-1,1]$.

7. Soit f une fonction réelle de la variable réelle.
   Que signifie « f est développable en série entière (au voisinage de 0) » ?

8. Rappeler les développements en série entière usuels en précisant bien leur intervalle de validité.

9. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

IV. Sur l'intégration

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ (on pensera au théorème sur les sommes de Riemann vu en pcsi).

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 \mathrm{d}t = 0$.
   Que peut-on dire du polynôme P ? (Justifier soigneusement.)

3. Que peut-on donner comme hypothèses pour pouvoir écrire (les bornes sont réelles ou infinies) :
   (a) $\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$?
   (b) $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$?
   (c) $\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)$?
   (d) $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$?
   (e) $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$? Et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$?
   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$? Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$?

4. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \ , \quad \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \ , \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\mathrm{d}t$$

5. (a) Rappeler le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
   (b) Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
   On pose alors pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ (fonction Gamma).
   Exprimer l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ en fonction de Γ.

7. Donner la définition d'une fonction intégrable sur un intervalle.

⋆ *Fonctions définies par une intégrale*

1. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\text{On pose } \varphi(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t.}$$

   (a) Soit D un sous-ensemble de J.
   Que doit-on prouver si l'énoncé demande de montrer que la fonction φ est bien définie sur D ?
   si l'énoncé demande de montrer que l'ensemble de définition de la fonction φ est D ?

   (b) Rappeler les hypothèses des théorèmes permettant de prouver que la fonction φ est continue sur J, puis que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur J.

   (c) Dans chacun des théorèmes des intégrales à paramètre, il y a une « hypothèse de domination ».
   Compléter : « la fonction qui majore doit être indépendante de la variable ... et ne doit donc dépendre que de la variable ... ».
   Si l'on n'arrive pas à majorer indépendamment de la variable x, que peut-on faire ?

2. On pose $G(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$ et $H(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$.
   Montrer que les fonctions G et H sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et déterminer leur dérivée.

⋆ *Suites définies par une intégrale*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\text{On pose pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.}$$

1. Donner deux théorèmes permettant de calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Dans le théorème de convergence dominée, il y a une « hypothèse de domination ».
   Compléter : « la fonction qui majore doit être indépendante de la variable ... et ne doit donc dépendre que de la variable ... ».

3. On suppose de plus que l'intervalle dépend de n, par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t$.
   Comment peut-on faire pour se ramener au cas précédent ?