Corrigé du devoir surveillé n ° 9

Problème I : Centrale Supélec MP 2013 Physique
Partie IV Propriétés optiques d'un gaz partiellement ionisé

IV.A Mouvements électroniques dans un plasma

IV.A.1) Dans l'hypothèse non relativiste on peut négliger la partie magnétique de la force de Lorentz.

On pourra considérer les champs comme uniformes si le déplacement de l'électron est petit devant la longueur d'onde (c'est d'ailleurs aussi l'hypothèse d'un mouvement non relativiste !).

IV.A.2) L'équation différentielle du mouvement de l'électron est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\overrightarrow{v}}{\tau_c} = -\dfrac{e}{m}\overrightarrow{E}$, ce qui montre qu'il y a un régime transitoire de l'ordre de $5\tau_c$, et qu'après ce régime transitoire on observera le régime permanent sinusoïdal.

IV.A.3) Le passage en notation complexe amène facilement $V_m = \dfrac{\dfrac{e\tau_c E_m}{m}}{\sqrt{1+\tau_c^2\omega^2}}$ et $\varphi = \pi - \arctan(\tau_c\omega) > 0$. Le signe positif de φ montre que la vitesse est en avance de phase sur E.

IV.A.4) Pour $\lambda = 632\,\mathrm{nm}$, on calcule une pulsation $\omega = 3\times10^{15}\,\mathrm{rad/s}$. Dès lors $1 \ll \tau_c\omega$. On peut donc simplifier les expressions précédentes en $V_m = \dfrac{eE_m}{m\omega}$ et $\varphi = \pi/2$.

IV.A.5) L'application numérique donne $V_m = 2\,\mathrm{m/s}$.

Par la relation $v_{th} = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}}$ on trouve une vitesse thermique de $2{,}1\times10^5\,\mathrm{m/s}$. On a donc $v \ll v_{th}$.

IV.A.6) D'après $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, en passant en notation complexe on a $V_m = \omega Z_m$, d'où $Z_m = \dfrac{V_m}{\omega} = 7{,}9\times10^{-16}\,\mathrm{m}$. L'hypothèse du déplacement très faible devant la longueur d'onde est sans doute vérifiée...

IV.B Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma neutre à faible densité

IV.B.1) Question de cours : $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ (équation de Maxwell-Gauss), $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{B}\right) = 0$ (équation de Maxwell-Flux), $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ (équation de Maxwell-Faraday) et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right) = \mu_0\left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$ (équation de Maxwell-Ampère) .

IV.B.2) Démarche classique qui consiste à partir du rotationnel du rotationnel du champ électrique et de touiller pour aboutir à $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \dfrac{\mu_0\gamma_0}{\tau_c}\overrightarrow{E}$.

IV.B.3) On injecte la forme de E dans l'équation de propragation pour obtenir la relation de dispersion ce qui donne ici $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$ en posant $\omega_p^2 = \dfrac{\mu_0 \gamma_0 c^2}{\tau_c} = \dfrac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \tau_c}$

IV.B.4) Comme dans le cours on a $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$ et $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$.

IV.B.5) On a $n_p = \dfrac{c}{v_\varphi} < 1$, ce qui fait du plasma un milieu "inhabituel".

En effectuant un développement limité de l'expression de n_p on obtient $n_p = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{2\omega^2} = 1 - \dfrac{n^* e^2}{2m\varepsilon_0 \omega^2}$, ce qui est bien une fonction affine de n^* (à ω fixé cependant...).

IV.B.6) Le claquement sec entendu est dû à une onde de choc dans laquelle il y a discontinuité des vitesses, ce qui n'a pas été pris en compte ici.

Problème II : Centrale Supélec MPI 2023 Physique Parties I et III

I Protection des données bancaires par un conducteur

I.A Loi d'ohm locale

Q 1. L'application du PFD donne directement $m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -eE_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e}_x - \dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v}(t)$.

Q 2. Le passage en notation complexe donne $im\omega\underline{\overrightarrow{v}} = -eE_0 \exp(i\omega t)\, \overrightarrow{u}_x - \dfrac{m}{\tau}\underline{\overrightarrow{v}}$, soit $\underline{\overrightarrow{v}} = \dfrac{-\dfrac{eE_0}{m}}{\dfrac{1}{\tau} + i\omega} \exp(i\omega t)\, \overrightarrow{u}_x$ et ainsi par identification $\underline{\overrightarrow{v}_0} = \dfrac{-\dfrac{e\tau}{m}}{1 + i\tau\omega} E_0 \overrightarrow{u}_x$.

Q 3. D'après la définition $\underline{\overrightarrow{j}} = n^*(-e)\underline{\overrightarrow{v}} = \dfrac{\dfrac{n^* e^2 \tau}{m}}{1 + i\tau\omega} \exp(i\omega t)\, E_0 \overrightarrow{u}_x$.

Q 4. La relation précédente s'écrit également $\underline{\overrightarrow{j}} = n^*(-e)\underline{\overrightarrow{v}} = \dfrac{\dfrac{n^* e^2 \tau}{m}}{1 + i\tau\omega}\underline{\overrightarrow{E}}$, ce qui permet d'établir une loi d'Ohm locale complexe en définissant une conductivité complexe $\underline{\gamma} = \dfrac{\dfrac{n^* e^2 \tau}{m}}{1 + i\tau\omega} = \dfrac{\gamma_0}{1 + ig(\omega)}$ en posant $\gamma_0 = \dfrac{n^* e^2 \tau}{m}$ et $g(\omega) = \tau\omega$.

Q 5. La conductivité deviendra réelle si $\tau\omega \ll 1$, soit $f \ll \dfrac{1}{2\pi\tau} = 1{,}6 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On pourra donc prendre $f_{\mathrm{lim}} = 1 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}$ par exemple.

Q 6. La fréquence de travail pour les communications NGC-RFID de $14\,\mathrm{MHz} = 14 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$ vérifie largement cette condition. On pourra donc écrire la loi d'Ohm locale sous la forme $\overrightarrow{j} = \gamma_0 \overrightarrow{E}$.

Q 7. L'équation de Maxwell-Ampère est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = \mu_0\left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$. Ici $\left\|\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right\| \simeq \omega \left\|\overrightarrow{E}\right\|$ en ordre de grandeur, et $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = \gamma_0 \left\|\overrightarrow{E}\right\|$. Dès lors le rapport demandé vaut $\dfrac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} = \dfrac{38 \times 10^6}{2\pi \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times 14 \times 10^6} = 4{,}9 \times 10^{10} \gg 1$.

Q 8. Dès lors on peut négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère. Cette approximation est celle de l'ARQS (magnétique).

I.B Propagation d'une onde électromagnétique

Q 9. Cf. cours. En combinant l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation de conservation de la charge il vient $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\rho = 0$. Ce qui montre qu'au bout de quelques $\tau' = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma_0}$ la densité volumique de charge est nulle.

Q 10. L'application numérique donne $\tau' = 2 \times 10^{-19}$ s. Or la fréquence d'excitation du milieu est nécessairement inférieure à f_{lim} calculée avant, ce qui fait que la période d'excitation du milieu est très grande devant τ' : le milieu peut donc être considéré comme électriquement neutre.
L'équation de Maxwell-Gauss devient alors $\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = 0$.

Q 11. On part classiquement de la relation $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss.

Par ailleurs d'après l'équation de Mawell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}\right)}{\partial t} =$ $-\dfrac{\partial\left(\mu_0 \overrightarrow{j}\right)}{\partial t} = -\mu_0\gamma_0\dfrac{\overrightarrow{E}}{\partial t}$ d'après le théorème de Schwarz (pas de t à ce Schwarz là John...) puis la loi d'Ohm locale. Pour finir il vient il vient bien $\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\gamma_0\dfrac{\overrightarrow{E}}{\partial t}$, ce qui est de la forme attendue en posant $D = \dfrac{1}{\mu_0\gamma_0}$, dont l'unité est nécessairement par homogénéité m^2/s (c'est un coefficient de diffusion...).
Le champ électrique $\overrightarrow{E}_c$ doit nécessaireemnt vérifier cette relation.

Q 12. On passe en notation complexe. Le champ $\overrightarrow{\underline{E}}_c$ vérifie également (par linéarité) l'équation précédente. L'application des opérateurs est grandement simplifiée en notation complexe et donne ici $(-i\underline{k}_t)^2\,\overrightarrow{\underline{E}}_c - \dfrac{i\omega}{D}\overrightarrow{\underline{E}}_c = \overrightarrow{0}$, soit en supposant le champ électrique non identiquement nul $-\underline{k}_t^2 - i\omega\mu_0\gamma_0 = 0$, ce qui est la relation attendue.

Q 13. En posant $\underline{k}_t = \alpha + i\beta$, la résolution amène facilement $\alpha + i\beta = \pm\sqrt{\omega\mu_0\gamma_0}\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$. Si on prend $\alpha > 0$, alors $\alpha = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}}$ et $\beta = -\alpha = -\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}}$.

Q 14. Il suffit d'injecter l'expression de $\underline{k}_t$ dans l'expression du champ complexe, de mettre en préfacteur l'exponentielle réelle pour obtenir la forme attendue avec $\delta = \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\gamma_0}}$.

Q 15. À un instant t fixé le graphe est analogue à celui de la courbe d'un oscillateur harmonique amorti en régime pseudo périodique. Mais attention ici la variable est z, pas le temps ! ! δ est la distance caractéristique d'amortissement de l'onde. On peut la déterminer à partir de la tangente à l'origine à l'exponentielle $\exp\left(-\dfrac{z}{\delta}\right)$ qui enveloppe les oscillations. Mais mais mais... δ est également lié à la pseudo-période (pseudo longueur d'onde ?) des oscillations spatiales par $\lambda = 2\pi\delta$! ! (Bon c'est plus difficile à représenter...)

Q 16. La grandeur δ est l'épaisseur de peau, ou la profondeur de pénétration. C'est la taille caractéristique sur laquelle les champs sont non nuls. Au-delà les champs sont quasiment complètement amortis. L'application numérique donne ici $\delta = 21{,}8\,\mu\text{m}$ pour les ondes NFC-RFID.

I.C Réflexion sur un conducteur ohmique

Q 17. Il s'agit d'une onde se propageant selon Oz, dans le sens des z décroissants, a priori polarisée comme l'onde incidente, de même pulsation (par linéarité des équations) avec une amplitude a priori différente de l'onde incidente. On peut donc proposer $\overrightarrow{\underline{E}}_r(z,t) = \underline{E}_{0,r}\exp\left(i\left(\omega t + kz\right)\right)\overrightarrow{u}_x$.

Q 18. Les trois champs électriques sont tous tangents à la surface de séparation. La continuité de la composante tangentielle en $z = 0$ à tout instant permet donc d'écrire $\underline{E}_{0,i} + \underline{E}_{0,r} = E_{0,c}$, ce qui se réécrit $1 + \underline{r} = \underline{t}$.

Q 19. La traduction de l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe permet d'écrire (et ainsi calculer les champs magnétiques) pour les trois ondes $\overrightarrow{\underline{B}}_i = \dfrac{k\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{E}}_i}{\omega} = \dfrac{k}{\omega}\underline{E}_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\overrightarrow{u}_y = \dfrac{\underline{E}_{0,i}}{c}\exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\overrightarrow{u}_y$, puis de même $\overrightarrow{\underline{B}}_r = \dfrac{-k\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{E}}_r}{\omega} = -\dfrac{k}{\omega}\underline{E}_{0,r}\exp\left(i\left(\omega t + kz\right)\right)\overrightarrow{u}_y = -\dfrac{\underline{E}_{0,r}}{c}\exp\left(i\left(\omega t + kz\right)\right)\overrightarrow{u}_y$ (attention au sens de propagation !!) et enfin $\overrightarrow{\underline{B}}_c = \dfrac{\underline{k_t}\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{E}}_c}{\omega} = \dfrac{\underline{k_t}}{\omega}\underline{E}_{0,c}\exp\left(i\left(\omega t - \underline{k_t}z\right)\right)\overrightarrow{u}_y$ (attention ici au fait de prendre le vecteur d'onde complexe $\underline{k_t}\overrightarrow{u}_z$!!).

Q 20. La relation de passage pour le champ magnétique avec des courants surfaciques nuls donne la continuité du champ magnétique à tout instant en $z = 0$. Dès lors il vient $\dfrac{k}{\omega}\underline{E}_{0,i} - \dfrac{k}{\omega}\underline{E}_{0,r} = \dfrac{\underline{k_t}}{\omega}\underline{E}_{0,c}$, ce qui se réécrit $1 - \underline{r} = \dfrac{\underline{k_t}}{k}\underline{t} = \dfrac{1-i}{k\delta}\underline{t}$.

Q 21. Il suffit de résoudre le petit système des deux équations précédentes pour obtenir les deux relations voulues...

Q 22. Pour un conducteur parfait γ_0 devient infini, et donc $\delta = 0$. Il vient alors $\underline{r} = -1$ et $\underline{t} = 0$. On retrouve les résultats vus dans le chapitre sur la réflexion sur un conducteur parfait. On voit donc que l'onde ne peut pénétrer le conducteur parfait : la protection est parfaite !!

Q 23. On calcule $k\delta = 6{,}38 \times 10^{-6}$, puis $|\underline{r}| = 0{,}999\,993\,62$ et enfin $T = 1{,}28 \times 10^{-5}$!!
On voit que d'une part une portion extrèmement faible de l'énergie incidente rentre dans le métal, et que d'autre part comme $\dfrac{a}{\delta} = 1$, une fraction de l'énergie initiale absolument ridicule est susceptible de traverser la feuille d'aluminium.

III Réception d'une communication téléphonique

III.A Rayonnement d'une antenne

Q 42. L'approximation $r \gg a$ est l'approximation dipolaire (étude à grande distance devant la taille du dipôle), $\lambda \gg a$ est liée à l'approximation du mouvement non relativiste des charges.

Q 43. $\overrightarrow{p} = qz(t)\overrightarrow{u}_z = qa\sin\left(\omega t\right)\overrightarrow{u}_z$.

Q 44. $I(t) = \dfrac{1}{2a}\omega qa\cos\left(\omega t\right)$, et donc l'amplitude est $I_0 = \dfrac{\omega q}{2}$.

Q 45. Par la formule donnée on calcule $\Pi(t) = \dfrac{\mu_0}{6\pi c}\left(-\omega^2 qa\sin\left(\omega t\right)\right)^2 = \dfrac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{6\pi c}\sin^2\left(\omega t\right)$.
Dès lors la valeur moyenne temporelle est $P_r = \dfrac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{12\pi c}$.

Q 46. D'après la définition de I_0, il vient $q = \dfrac{2I_0}{\omega} = \dfrac{2I_0\lambda}{2\pi c}$, d'où $P_r = \dfrac{\mu_0 I_0^2 a^2 4\pi^2 c}{3\pi\lambda^2} = \dfrac{1}{2}R_r I_0^2$ en posant $R_r = \dfrac{\mu_0 a^2 8\pi c}{3\lambda^2}$.

Q 47. Cette valeur permet de comparer diverses antennes ou encore de prévoir l'intensité qui doit circuler dans l'antenne pour avoir une puissance rayonnée donnée (ce qui permet de dimensionner le système). Remarque : cette résistance de rayonnement s'exprime bien en Ω !

Q 48. La 4G présente une longueur $\dfrac{3500}{800} = 4,375$ fois plus grande que la 5G, et son antenne est 4 fois plus grande, ce qui fait que les résistances de rayonnement sont quasiment les mêmes ! Il n'y a pas eu grand chose à modifier dans le circuit de puissance lors de la modification.

On calcule en 4G $\lambda_{4G} = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3\times 10^8}{8\times 10^8} = 0{,}375\,\mathrm{m}$, d'où une zone de rayonnement de l'ordre de quelques dizaines de mètre. De plus on note qu'on a bien $a = 2\,\mathrm{cm} \ll \lambda_{4G}$! Ouf.. 8

Et de même en 5G , $\lambda_{5G} = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3\times 10^8}{3{,}5\times 10^9} = 8{,}5\,cm$, d'où une zone de rayonnement de l'ordre de quelques mètres. De plus on note qu'on a également, mais c'est plus limite $a = 0{,}5\,\mathrm{cm} \ll \lambda_{5G}$!

Q 49. L'application numérique donne $R_{r,4G} = 9\,\Omega$ et $R_{r,5G} = 11\,\Omega$, valeurs très proches comme on l'avait prédit plus haut.

III.B Problème de réception du signal

Q 50. Le champ électrique incident s'écrit $\underline{E}_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\overrightarrow{u}_x$. En $z = L$ il vaut donc $\underline{E}_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t - kL\right)\right)\overrightarrow{u}_x$. Le champ réfléchi a pour expression $\underline{E}_{0,r}\exp\left(i\left(\omega t + kz\right)\right)\overrightarrow{u}_x$, soit en $z = L$ il vaut $\underline{E}_{0,r}\exp\left(i\left(\omega t + kL\right)\right)\overrightarrow{u}_x$. À la surface (en $z = L$) le champ résultant doit être nul (toujours le même argument par continuité de la composante tangentielle). Dès lors $\underline{E}_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t - kL\right)\right) + \underline{E}_{0,r}\exp\left(i\left(\omega t + kL\right)\right) = 0$ pour tout t, ce qui donne $\underline{E}_{0,r} = -\underline{E}_{0,i}\exp\left(-2ikL\right)$.

Pour conclure $\underline{\overrightarrow{E}}_r\left(z,t\right) = -\underline{E}_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t + k\left(z - 2L\right)\right)\right)\overrightarrow{u}_x$.

Q 51. Le champ total est donc pour $z < L$: $\underline{\overrightarrow{E}}_{\text{tot}}\left(z,t\right) = \underline{\overrightarrow{E}}_i\left(z,t\right) + \underline{\overrightarrow{E}}_r\left(z,t\right) =$
$E_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t - kL\right)\right)\left(\exp\left(-ik\left(z - L\right)\right) - \exp\left(+ik\left(z - L\right)\right)\right)\overrightarrow{u}_x =$
$-2i\sin\left(k\left(z - L\right)\right)E_{0,i}\exp\left(i\left(\omega t - kL\right)\right)\overrightarrow{u}_z$.

En repassant en notation réelle comme demandé dans la question :
$\overrightarrow{E}_{\text{tot}} = 2E_0\sin\left(k\left(z - L\right)\right)\sin\left(\omega t - kL\right)\overrightarrow{u}_z$.

Cette écriture du champ électrique comme produit de deux fonctions réelles respectivement du temps et de l'espace montre qu'il s'agit d'une onde stationnaire.

Q 52. La puissance reçue par l'utilisateur est alors $P \propto 2E_0^2\sin^2\left(k\left(z - L\right)\right)$. Elle dépend de z. On peut maintenant calculer la puissance moyenne spatiale, ce qui donne $\left\langle P\right\rangle_z \propto E_0^2$. La puissance seuil est alors $P_{\text{seuil}} \propto \dfrac{E_0^2}{10}$. On peut donc écrire $P = 20\times P_{\text{seuil}}\sin^2\left(k\left(z - L\right)\right)$. Pour répondre à cette question il suffit de calculer la distance entre deux points successifs pour lesquels $P = P_{\text{seuil}}$. Posons $Z = z - L$, on résout $\dfrac{1}{20} = \sin^2\left(kZ\right))$, soit $\sin\left(kZ\right)) = \dfrac{1}{\sqrt{20}}$, et donc en prenant les deux valeurs autour de 0 $Z = \pm\dfrac{1}{k}\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)$. La distance sur laquelle il y a coupure est donc $D = \dfrac{2}{k}\times\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right) = \dfrac{\lambda}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right) = 6{,}1\,\mathrm{mm}$.

Pour le piéton la durée correspondante est $\Delta_{\text{piéton}} = 7{,}3\,\mathrm{ms}$, pour la voiture $\Delta_{\text{voiture}} = 0{,}44\,\mathrm{ms}$.

Q 53. Il faut parcourir deux fois la distance $L - z$ pendant Δt à la célérité c, soit $L - z = \dfrac{c\Delta t}{2} = 75\,\mathrm{m}$.