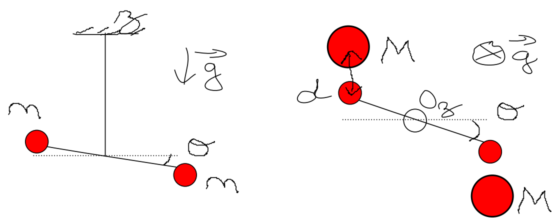
Travaux Dirigés de M_6

Conseils pour ce TD :

- Les mêmes que ceux de M_5.

Exercice 1 : Expérience de Cavendish

La figure ci-dessous illustre le principe de l'expérience de Cavendish. Deux particules de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur $2l$, un fil de torsion relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion. En approchant deux sphères de masse M à une distance d de chacune des extrémités du pendule, on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer G la constante de gravitation.



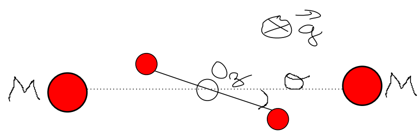
Dans la suite, on note θ la déviation angulaire du pendule à sa position d'équilibre. On note k la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel et $-k\theta\vec{u}_z$. Les sphères de masse M et les particules m sont considérées comme des particules ponctuelles.

Méthode historique

1. Calculer la déviation angulaire θ due à l'attraction des sphères. On suppose $\theta l \ll d$ et $l \gg d$. On fera bien attention à justifier toutes les simplifications effectuées en précisant à chaque fois l'hypothèse utilisée.
2. Pour son expérience, Cavendish a eu utilisé les paramètres suivants : $m = 0{,}80$ kg, $M = 158$ kg, $l = 1{,}0$ m, $d = 20$ cm et $k = 3{,}6.10^{-4}$ kg.m^2.s^{-1}. Calculer la valeur numérique de θ.
3. On suppose que la masse de la tige qui relie les deux particules de masse m est négligeable. Calculer le moment d'inertie I du pendule de torsion par rapport à son axe de rotation.
4. Parmi les différentes grandeurs qui interviennent dans la détermination de G à partir de la mesure de θ, laquelle vous semble la plus difficile à déterminer directement ? Proposer une expérience complémentaire pour mesurer cette grandeur. Éxprimer G en fonction de M, l, d et θ et du résultat de la mesure que vous avez proposée.

Méthode dynamique

1. En l'absence des masses M, quelle est la période T des oscillations du pendule de torsion ?
2. On ajoute les masses M à une distance d des masses m, mais cette fois-ci dans l'alignement de la tige du pendule. On cherche la nouvelle période des oscillations. On suppose à nouveau que $l\theta \ll d$. Calculer le moment de la force exercée par une masse M sur le pendule de torsion.
3. On suppose que l'angle θ est petit devant 1 rad. Quelle est la période des oscillations T'.
4. Montrer que l'on peut alors mesurer G à l'aide de T et T'.



Exercice 2 : Étude d'une poulie Une masse m de 5,0 kg est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0$ kg et de rayon $R = 10$ cm en liaison pivot idéale autour de son axe (horizontale) avec un support fixe. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2}m_pR^2$

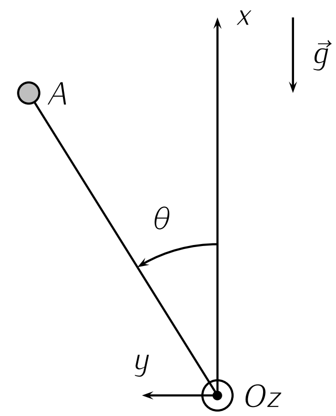
1. Si la poulie est en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, quelle est la vitesse de la masse m ?
2. La poulie est retenue par un opérateur. Où ce dernier a-t-il le plus intérêt à appliquer sa force et dans quelle direction ? Quelle est la force minimale qu'il doit exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
3. L'opérateur lâche la poulie qui se met en mouvement. Déterminer l'accélération de la masse ainsi que la tension de la corde

Exercice 3 : Volant d'inertie

Initialement immobile, une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment Γ_0 constant. On étudie le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\omega$.

1. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système. Donner l'expression de ω/ω_0 en fonction de t/τ et décrire l'évolution.
2. On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibration indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la pulsation Ω avec un taux de modulation η tel que $\Gamma = \Gamma_0(1 + \eta\cos\Omega t)$. Établir l'équation différentielle définie par la fonction $\zeta(t)$ telle que $\omega(t) = \omega_0(1 + \zeta(t))$. Montrer que, au bout d'un temps suffisant $\zeta(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme : $\zeta = \alpha\cos(\Omega t + \varphi)$. Déterminer les constantes α et $\tan(\varphi)$. À l'aide des expression précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournant, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif de rayon rayon appelé volant.

Exercice 4 : Pendule de Holweck – Lejay.



Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = OA$, articulée en O et mobile dans un plan vertical.
Un ressort "spirale" (non représenté sur la figure) exerce sur M, via la tige, un couple de rappel équivalent à un moment de force dont la projection sur Oz est : $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$.

1. Déterminer, par application du théorème scalaire du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par θ.
2. À quelle condition, la position $\theta = 0$ correspond elle à un équilibre stable ?
3. Si cette condition est vérifiée, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$ et mettre T sous la forme $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G-g}}$. On donnera l'expression de G.
4. Calculer $\frac{\Delta T}{T}$ la variation relative de T si g varie de Δg. Voyez-vous une application ?

Exercice 5 : Chute d'un arbre (ou d'un stylo)

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile.
On donne le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à l'arbre et passant par une des extrémité : $I = \frac{1}{3}mL^2$

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ, sa vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

3. ré-écrire cette relation en utilisant la méthode de séparation des variables telle qu'elle a été vue en cinétique chimique (mettre tout les t et dt d'un coté et tout les θ et $d\theta$ de l'autre)
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne pour $\theta = 5°$

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$$

5. Proposez un programme permettant d'évaluer cette intégrale dans le cas général.
6. On se rend compte que lorsque $\theta_0 \to 0$, l'intégrale tend vers l'infini. Et le temps de chute ? Est-ce surprenant ?
7. Par une méthode similaire, calculer la période des oscillations d'un pendule simple en fonction de l'amplitude lorsque l'on ne peut pas faire l'approximation des petites amplitudes. (on exprimera le résultat sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer)